Александр А. Локшин
Елена А. Сагомонян

ИЗБРАННЫЕ ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ 4–7 КЛАССОВ

Учебное пособие

Второе издание, исправленное и дополненное

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2024

УДК 51(07)
ББК 22.1я7
Л73

https://elibrary.ru/ubplao

Рецензент:
Е.А. Иванова – канд. физ.-мат. наук, доцент
(МПГУ, кафедра математики и информатики в начальной школе)

Локшин, Александр Александрович.

Л73 **Избранные текстовые задачи для школьников 4–7 классов :** учебное пособие / А.А. Локшин, Е.А. Сагомонян. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : МАКС Пресс, 2024. – 92 с.: ил.

ISBN 978-5-317-07074-8

https://doi.org/10.29003/m3616.978-5-317-07074-8

В пособии собраны задачи, требующие умения рассуждать. Во многих задачах использованы сказочные сюжеты. Адресовано школьникам, а также их родителям, учителям и всем любителям математики.

Ключевые слова: Баба-Яга, Кощей Бессмертный, Говорящий кот, Инопланетянин.

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

Alexander A. Lokshin, Elena A. Sagomonyan

Selected text tasks for schoolchildren in grades 4-7: manual. – 2nd ed., rev. and exp. – Moscow: MAKS Press, 2024. – 92 p.: ill.

ISBN 978-5-317-07074-8

https://doi.org/10.29003/m3616.978-5-317-07074-8

The manual contains tasks that require the ability to reason. Fairy tales storylines are used in many tasks. Addressed to schoolchildren, as well as their parents, teachers and all fans of mathematics.

Keywords: Baba Yaga, Koschey the Immortal, Talking cat, Alien.

ISBN 978-5-317-07074-8

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В этой небольшой книжке собраны текстовые задачи, для решения которых необходимо, в первую очередь, умение рассуждать. Во многих задачах из педагогических соображений используются сказочные сюжеты.

Большинство задач было в той или иной форме известно ранее, но разбросано по различным пособиям. Жизнь показала, что имеет смысл собрать их вместе.

Некоторые задачи являются авторскими. Во втором издании исправлен ряд погрешностей изложения и добавлено несколько новых важных задач.

Авторы признательны Е.А. Ивановой, без чьей помощи и поддержки эта книжка никогда не была бы написана.

Авторы,
Москва, октябрь 2023

Часть I. ЗАДАЧИ

Задача 1. Четверо друзей (Медведь, Волк, Заяц и Лиса) купили волшебный пылесос. Медведь внес 2/7 от того, что внесли все остальные, Волк внес 1/8 от того, что внесли остальные, Заяц внес в 2 два раза больше, чем внесли остальные. Кто внес больше денег – Волк или Лиса?

Задача 2. Четверо друзей (Медведь, Волк, Заяц и Лиса) купили волшебный пылесос. Медведь внес 2/7 от того, что внесли все остальные, Волк внес 1/8 от того, что внесли остальные, Заяц внес ½ от того, что внесли остальные, Лиса внесла 100 рублей. Сколько стоил пылесос?

Задача 3. (см. [2]) Пятеро волчиц – Белла, Велла, Гелла, Делла и Елла – пели волшебные песни, причем ни одна песня не исполнялась дважды. Каждый раз пели вчетвером, а пятая волчица аккомпанировала им на гитаре. Елла пела 8 раз (больше всех); Белла, Велла и Гелла пели одинаковое количество раз, а Делла пела 3 раза (меньше всех). Сколько песен было спето?

Задача 3а. Пятеро волчиц – Белла, Велла, Гелла, Делла и Елла – пели волшебные песни, причем ни одна песня не исполнялась дважды. Каждый раз пели втроем, а оставшиеся две волчицы аккомпанировали им на гитарах. Елла пела 108 раз; Белла, Велла и Гелла пели одинаковое количество раз, а Делла пела 103 раза. Могло ли так быть?

Задача 3б. На планете Тральфамадор расположились три королевства. (При этом местным жителям разрешалось иметь более одного гражданства и никаких других жителей, кроме граждан этих королевств, на планете не было.) В первых двух королевствах было по 600 граждан, а в третьем – 300 граждан. Кроме того, известно, что ровно одним гражданством обладали 200 жителей, ровно двумя гражданствами – еще 200 жителей, а у остальных было по три гражданства. Сколько всего жителей было на планете Тральфамадор?

Задача 3в. Баба-Яга разводила Говорящих котов, каждый из которых владел хотя бы одним из следующих трех языков: английский, французский, японский. Английским языком владели 6 котов, столько же котов говорили по-французски, а по-японски говорить умели только три кота. Кроме того, известно, что ровно одним языком владели два кота, ровно двумя языками – еще два кота, а остальные коты умели разговаривать на трех языках. Сколько всего Говорящих котов жило у Бабы-Яги?

Задача 4. Когда Зайцу было столько лет, сколько Лисе теперь, он был старше Лисы в 10 раз. Сейчас им вместе 29 лет. Сколько лет каждому?

Задача 5. Когда Попугаю будет столько лет, сколько Черепахе теперь, Черепаха будет старше Попугая в полтора раза, а вместе им будет 50 лет. Сколько лет каждому сейчас?

Задача 5а. Попугай и Черепаха живут в параллельных мирах. В мире, где живет Черепаха, время идет в обратную сторону. Когда Попугаю будет столько лет, сколько Черепахе теперь, Черепаха будет моложе Попугая в полтора раза, а вместе им будет 50 лет. Сколько лет каждому сейчас?

Задача 6. Слон съедает горку бананов за 1 час. Сорок обезьян съедают такую же горку бананов за 2 часа. За какое время съедят эту же горку бананов слон и 80 обезьян?

Задача 7. Слон съедает горку бананов за 1 час. Сорок обезьян съедают такую же горку бананов за 7 часов. За какое время съедят эту же горку бананов слон и 70 обезьян?

Задача 7а. Корова съедает стог сена за 7 дней, овца – за 11 дней, а коза – за 13 дней. За какое время корова, овца и коза съедят стог сена, если будут есть его одновременно?

Задача 7б. Иванушка-дурачок может нарисовать портрет Василисы Премудрой за 7 дней, Илья Муромец – за 11 дней, а Кощей Бессмертный – за 13 дней. За какое время Иванушка-дурачок, Илья Муромец и

Кощей смогут нарисовать портрет Василисы Премудрой, если будут рисовать его вместе?

Задача 7в. В стране Тьмутаракании все бассейны наполняются не водой, а киселем. Из первой трубы бассейн заполняется доверху киселем за 2 часа, из второй трубы – за 5 часов, а по третьей трубе весь кисель вытекает из полного бассейна за 3 часа. Первоначально бассейн пуст; после того, как будут открыты все три трубы, за какое время бассейн заполнится доверху киселем?

Задача 8. (см. [3]) Пес Шарик добегает от пункта А до пункта В за 1 час. Кот Мурзик добегает от пункта В до пункта А за 2 часа. Через какое время они встретятся, если одновременно выбегут навстречу друг другу?

Задача 8а. Пес Шарик добегает от пункта А до пункта В за 1 час. Кот Мурзик добегает от пункта В до пункта А за 2 часа. Шарик и Мурзик одновременно выбежали навстречу друг другу; при этом муха, сидевшая на носу у Шарика, взлетела и полетела навстречу Мурзику. Долетев до Мурзика, она тут же повернула назад и так летела до встречи с Шариком. Затем, долетев до Шарика, сразу же повернула в сторону Мурзика, и т.д. Так она летала со скоростью 90км/ч до тех пор, пока Шарик и Мурзик не встретились. Сколько километров пролетела муха?

Задача 8б. Пес Шарик добегает от пункта А до пункта В за 1 час. Кот Мурзик добегает от пункта В до пункта А за 2 часа. Шарик и Мурзик одновременно выбежали навстречу друг другу; при этом муха, сидевшая на носу у Шарика, взлетела и полетела навстречу Мурзику со скоростью 90 км/ч. Одновременно с мухой, шершень, сидевший на носу у Мурзика, тоже взлетел и полетел навстречу Шарику со скоростью 120 км/ч. Встретившись в воздухе, муха и шершень развернулись и полетели обратно. Долетев, соответственно, до Шарика и Мурзика, они снова развернулись и полетели навстречу друг другу, и т.д. Так они летали (разворачиваясь либо при встрече друг с другом в воздухе, либо долетев до своих «хозяев») до тех пор, пока Шарик и Мурзик не встретились. Сколько километров пролетел шершень?

Задача 9. Пес Шарик добегает от пункта А до пункта В за 1 час. Кот Мурзик добегает от пункта В до пункта А за 2 часа. Через какое время расстояние между ними удвоится, если они одновременно выбегут в противоположные стороны?

Задача 10. Пес Шарик добегает от пункта А до пункта В за 1 час. Кот Мурзик добегает от пункта В до пункта А за 7 часов. Шарик и Мурзик выбежали одновременно, соответственно из пунктов А и В, причем Мурзик бежит в сторону, противоположную пункту А, а Шарик его догоняет. Сколько времени понадобится Шарику, чтобы догнать Мурзика?

Задача 10а. (см. [1]) Лисенок и Крысенок живут в одном доме и ходят в школу, причем Крысенок передвигается быстрее, чем Лисенок. Как-то раз Крысенок вышел из дома на 10 минут позже, чем Лисенок, догнал его на середине пути и отправился дальше. На сколько минут раньше, чем Лисенок, Крысенок прибыл в школу?

Задача 10б. Лисенок и Крысенок живут в одном доме и ходят в школу, причем Крысенок передвигается быстрее, чем Лисенок. Как-то раз Крысенок вышел из дома на 10 минут позже, чем Лисенок, догнал его, проделав две трети пути, и отправился дальше. На сколько минут раньше, чем Лисенок, Крысенок прибыл в школу?

Задача 10в. Лисенок отправился из дома в школу, а Крысенок пошел из школы домой. При этом Крысенок вышел из школы на 20 минут позже, чем Лисенок вышел из дома. Встретились они ровно посередине дороги, соединяющей школу и дом. Кто и на сколько раньше доберется до цели своего маршрута – Лисенок или Крысенок?

Задача 10г. Лисенок отправился из дома в школу, а Крысенок пошел из школы домой. При этом Крысенок вышел из школы на 20 минут позже, чем Лисенок вышел из дома. Вся дорога заняла у Лисенка 50 минут, а у Крысенка 40 минут. Длину всей дороги от дома до школы обозначим через S. На каком расстоянии от школы встретились Лисенок и Крысенок?

Задача 10д. Фермер живет на вершине холма, а его Друг – у подножья холма. В доме у Фермера имеются напольные часы с маятником (эти часы невозможно даже сдвинуть с места), а никаких других часов нет (интернета тоже нет). У его Друга тоже нет интернета и никаких других часов, кроме таких же напольных. Как-то раз, в пасмурный день, напольные часы Фермера остановились, т.к. он забыл их завести. Не имея возможности определить время хотя бы приблизительно по солнцу, Фермер, побывав у своего Друга, все же установил приближенное время на своих часах. На следующий день Фермер снова отправился к своему Другу в гости и обнаружил, что теперь напольные часы его Друга остановились, т.к. не были вовремя заведены. Тем не менее, Фермер помог своему Другу установить точное время на его часах. Как ему это удалось?

Задача 10е. Имеется электронное табло, которое всегда показывает точное время, а также обычные часы со стрелками. Ровно в полночь на часах со стрелками установили точное время; затем с помощью табло выяснилось, что каждые 66 минут часовая и минутная стрелки на них совпадают. Спешат, отстают или идут точно часы со стрелками?

Задача 10ж. На инопланетных часах обе стрелки (часовая и минутная) движутся с правильными скоростями. Однако часовая стрелка вращается в правильном направлении, а минутная – в противоположном (т.е. «против часовой стрелки»). Сколько раз в сутки такие часы показывают правильное время?

Задача 10з. На инопланетных часах обе стрелки (часовая и минутная) движутся с правильными скоростями. Однако часовая стрелка вращается в неправильном направлении, а минутная – в правильном. Сколько раз в сутки такие часы показывают правильное время?

Задача 10и. Самые обычные часы спешат на одну минуту в сутки. Ровно в полночь на них установили правильное время. Когда они в следующий раз покажут правильное время?

Задача 10к. Спускаясь по эскалатору, движущемуся вниз, человек насчитал 25 ступенек. Поднимаясь по эскалатору, движущемуся вниз, человек насчитал 75 ступенек. Сколько ступенек на покоящемся эскалаторе?

Задача 10л. (Эту задачу нужно решить арифметическим способом.) Из города А в город Б в момент времени Т выбежал Волк. Вскоре после этого из города Б в город А навстречу Волку с той же скоростью выбежала Лиса. Известно, что Лиса добралась до города А в момент времени Т’. Спрашивается, в какой момент времени Волк и Лиса встретились?

Задача 11. Только один Вася входит одновременно в состав 75 самых аккуратных учеников школы и в состав 50 самых неаккуратных учеников школы. Сколько учеников в школе?

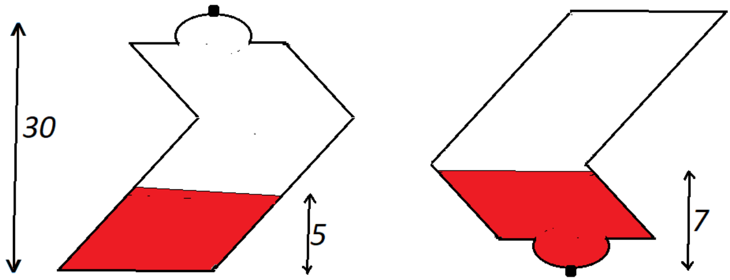
Задача 12. (см. 6]) Из всех учеников школы только один Вася не входит одновременно в состав 70 самых аккуратных учеников и в состав 69 самых неаккуратных учеников. Сколько учеников в школе?

Задача 12а. (см. [6]) Из всех учеников школы только Маша, Паша и Саша не входят одновременно в состав 70 лучших учеников и в состав 68 худших учеников. Сколько учеников в школе?

Задача 13. (см. [6]) Из всех учеников школы только Вася и Петя не входят одновременно в состав 40 лучших и 40 худших учеников. Сколько учеников в школе?

Задача 13а. Из всех учеников школы только Маша, Паша, Саша и Даша не входят одновременно в состав 70 самых высоких учеников, в состав 69 самых низкорослых учеников и в состав 67 учеников среднего роста. Сколько учеников в школе? (Предполагается, что все ученики разного роста и выстроены в шеренгу по росту. «Средние» ученики отсчитываются одновременно в обе стороны от середины шеренги.)

Задача 13б. Пираты нашли прозрачную бутылку странной формы, запечатанную сургучной печатью и отчасти наполненную неизвестной красной жидкостью. Прежде чем распечатывать бутылку, пираты решили узнать, какую долю объема бутылки занимала жидкость (см. пиратскую диаграмму). Какой ответ у них получился?



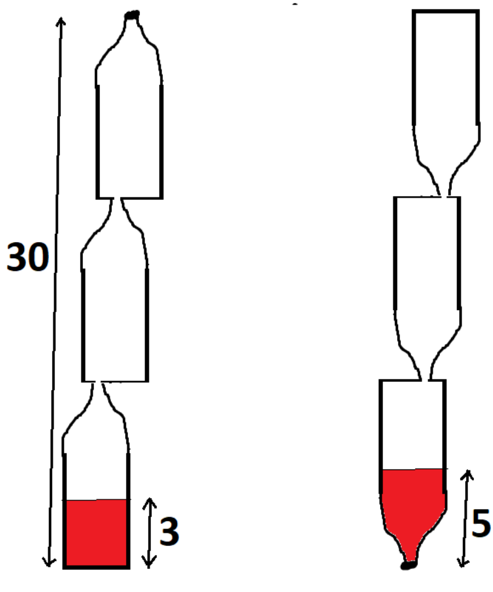
Пиратская диаграмма

Задача 13в. Для приема делегатов Инопланетной Конференции построили прямоугольное 12-этажное здание, на каждом этаже которого были только одноместные номера. (Количество номеров на всех этажах было одинаковым.) Кром того, построили кемпинг, состоявший из одноместных палаток. Когда прилетели инопланетяне, сначала решили их всех поселить в 12-этажном здании. Однако выяснилось, что самый верхний этаж оказывается незаселенным, если полностью заселить остальные этажи. Тогда решили переселить инопланетян в кемпинг; однако при этом оказалось, что все инопланетяне в кемпинге не помещаются, и приходится полностью заселять нижние три этажа

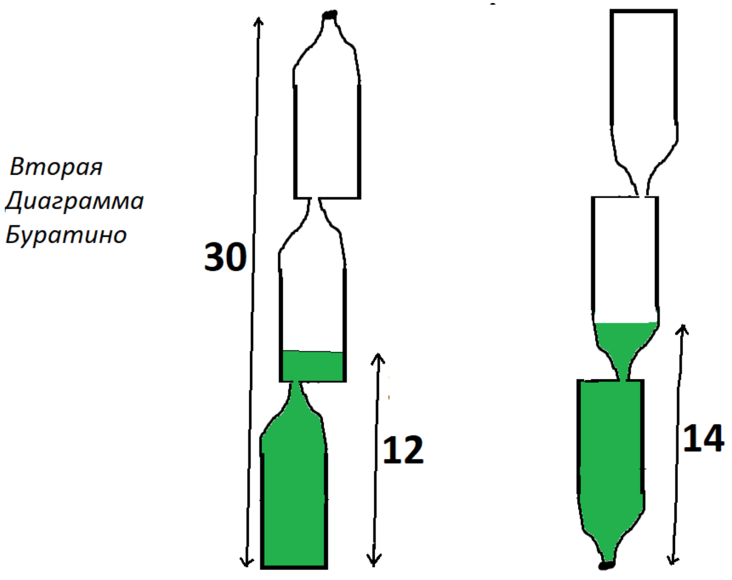
12-этажного здания. Какую долю от общего количества приготовленных мест заняли в результате инопланетяне?

Задача 13г. Буратино нашел запечатанную сургучом бутылку странной формы (см. Диаграмму Буратино), в которой находилась красная жидкость с запахом лепестков роз. Прежде чем откупорить бутылку и вылить ее содержимое на голову Мальвины, Буратино решил узнать, какую часть от общего объема бутылки занимала красная жидкость. Какой ответ у него должен был получиться?

Диаграмма Буратино



Задача 13д. Буратино нашел запечатанную сургучом бутылку странной формы (см. Вторую Диаграмму Буратино), в которой находилась зеленая жидкость с запахом мимозы. Прежде чем откупорить бутылку и вылить ее содержимое на голову Мальвины, Буратино решил узнать, какую часть от общего объема бутылки занимала зеленая жидкость. Какой ответ у него должен был получиться?



Задача 14. В банке сидели тараканы и девятиножки. Ученые биологи насчитали в банке всего 600 ног и 80 голов. Сколько было тараканов и сколько девятиножек?

Задача 14а. Петя посадил в банку несколько пятиножек, пауков и девятиножек. Потом ученые биологи насчитали там всего 13 голов и 116 ног. Сколько оказалось в банке пятиножек, пауков и девятиножек?

Задача 15. (см. [1]) На собачьей выставке каждая собака укусила четырех посетителей, а каждый посетитель был укушен тремя собаками. Кого было больше – посетителей или собак?

Задача 16. На выставке крокодилов каждый крокодил посмотрел на трех посетителей, а каждый посетитель посмотрел на четырех крокодилов. Кого было больше крокодилов или посетителей?

Задача 17. Богатый раджа раздавал нищим деньги, всем поровну, так что каждый получил по 12 рупий. Если бы нищих было на 5 больше, то каждый получил бы на 3 рупии меньше. Сколько было нищих?

Задача 18. Богатый раджа раздавал нищим деньги поровну, каждому досталось по 10 рупий. Если бы нищих было на 3 меньше, то каждый получил бы на 5 рупий больше. Сколько было нищих?

Задача 19. Богатый раджа раздавал нищим деньги поровну, всего он роздал 600 рупий. Если бы нищих было вдвое меньше, то каждый получил бы на 30 рупий больше. Сколько было нищих?

Задача 20. Богатый раджа раздавал нищим деньги поровну, всего он роздал 300 рупий. Если бы нищих было вдвое больше, то каждый получил бы на 10 рупий меньше. Сколько было нищих?

Задача 20а. Богатый раджа раздавал нищим деньги поровну, всего он роздал 300 рупий. Если бы нищих было втрое больше, то каждый получил бы на 10 рупий меньше. Сколько было нищих?

Задача 21. На бесконечной шахматной доске расставили в виде прямоугольника все имеющиеся в коробке изумрудные камни, в каждом горизонтальном ряду по 10 изумрудов. Если бы в каждом вертикальном ряду было на 3 изумруда меньше, то длина каждого горизонтального ряда увеличилась бы на 5 изумрудов. Сколько было изумрудов?

Задача 22. (см. [1]) Перед самым началом Всемирных Соревнований по хоккею клюшки подорожали на 15%, а после окончания Соревнований подешевели на 14%. Когда клюшки стоили дороже – до начала Соревнований или после их окончания?

Задача 22а. Гигантский арбуз весил 100 кг, влажность (насыщенность водой) арбуза составляла 97%. Затем, в результате землетрясения арбуз свалился в воду и находился в воде целый месяц, пока его оттуда наконец не вытащили. В итоге влажность арбуза составила 99%. Сколько стал весить арбуз?

Задача 23. (см. [4]) У Енота втрое больше орехов (по весу), чем у Моржа. Если Морж возьмет у Енота

1 кг орехов, то у Енота станет вдвое больше орехов (по весу), чем у Моржа. Сколько было кг орехов у каждого?

Задача 24. (см. [4]) У Енота было втрое больше (по весу) орехов, чем у Моржа. Но когда каждый из них съел по килограмму орехов, то у Енота стало в 5 раз больше (по весу) орехов, чем у Моржа. Сколько кг орехов было у каждого?

Задача 25. (см. [2]) На березах сидели воробьи. Когда сидели по четыре воробья, то три березы остались без воробьев. А когда расселись по три воробья, то одному воробью не хватило березы. Сколько было берез и сколько воробьев?

Задача 26. (см. [1]) Однажды Кощей Бессмертный решил позавтракать. Он набрал из жбана со сливками столовую ложку сливок и вылил ее в стакан чая. Потом перемешал (не очень тщательно) содержимое в стакане, набрал столовую ложку получившейся смеси и вылил ее в жбан и снова перемешал (на этот раз тщательно). Затем Кошей повторил ту же процедуру еще раз: набрал в жбане столовую ложку получившейся смеси, вылил ее в стакан (перемешал содержимое не очень тщательно), после чего набрал в стакане столовую ложку получившейся смеси и вылил ее в жбан. Чего в результате оказалось больше – сливок в стакане или чая в жбане?

Задача 26а. Однажды Кощей Бессмертный решил поужинать. Он расставил по кругу три одинаковых кувшинчика с молоком Чупакабры, а между ними (тоже по кругу) – три стаканчика разного размера с осиным ядом. Затем из кувшинчика № 1 перелил полную столовую ложку молока в стаканчик № 1. После чего из стаканчика № 1 перелил полную столовую ложку смеси в кувшинчик № 2, и так далее. Наконец, из стаканчика № 3 перелил полную столовую ложку смеси в кувшинчик № 1. Совершив все эти волшебные приготовления, Кощей перелил содержимое всех кувшинчиков в Большой Кувшин, а содержимое всех стаканчиков – в Большой Стакан. Но прежде чем приступить к ужину, Кощею было необходимо выяснить, чего больше – яда в Большом Кувшине или молока в Большом Стакане. Как ему это удалось?

К задаче 26а:
Кощей ужинает

Задача 27. Ехали два вместительных автобуса. В автобусе № 1 ехали зайцы, а в автобусе № 2 – еноты. На первой остановке из автобуса № 1 вышли 5 зайцев и вошли в автобус № 2. После чего из автобуса № 2 вышли 7 зверей, которые пересели в автобус № 1. На следующей остановке из автобуса № 1 вышли 7 зверей и пересели в автобус № 2, после чего из автобуса № 2 вышли 5 зверей, которые пересели в автобус № 1. Кого в результате стало больше – енотов в автобусе № 1 или зайцев в автобусе № 2?

Задача 28. Ехали два вместительных автобуса. В автобусе № 1 ехали зайцы, а в автобусе № 2 – еноты. На первой остановке из автобуса № 1 вышли 5 зайцев и вошли в автобус № 2. После чего из автобуса № 2 вышли 7 зверей, которые пересели в автобус № 1. На следующей остановке из автобуса № 1 вышли 7 зверей и пересели в автобус № 2, после чего из автобуса № 2 вышли 5 зверей, которые пересели в автобус № 1. Наконец, на третьей остановке в автобус № 1 вошли 10 зайцев, а в автобус № 2 вошли 10 енотов. Кого в результате стало больше – енотов в автобусе № 1 или зайцев в автобусе № 2?

Задача 29. Ехали два вместительных автобуса. В автобусе № 1 ехали зайцы, а в автобусе № 2 – еноты. На первой остановке из автобуса № 1 вышли 5 зайцев и вошли в автобус № 2. После чего из автобуса № 2 вышли 7 зверей, которые пересели в автобус № 1. На следующей остановке из автобуса № 1 вышли 7 зверей и пересели в автобус № 2, после чего из автобуса № 2 вышли 5 зверей, которые пересели в автобус № 1. Наконец, на третьей остановке в автобус № 2 вошли 10 зайцев, а в автобус № 1 вошли 10 енотов. Кого в результате стало больше – енотов в автобусе № 1 или зайцев в автобусе № 2?

Задача 30. (эта задача взята из [5]) Однажды Василиса Премудрая решила выйти замуж. К ней тут же посватались Кощей Бессмертный и Иванушка-дурачок. «Вот вам две задачи, – сказала Василиса, – вы уж как-нибудь разберитесь между собой, кто какую задачу будет решать. А замуж я выйду за того, кто быстрее справится со своей задачей».

А задачи были такие:

1) распилить березовый куб на четыре кубика;

2) распилить железный кубище на восемь кубов.

Пока Иванушка-дурачок чесал затылок, Кощей быстро схватил березовый куб и помчался его распиливать. «Так нечестно!» – закричал Иванушка, но было уже поздно.

За кого же вышла в результате замуж Василиса Премудрая?

Задача 30а. (см. [7]) Даны неправильные чашечные весы (не уравновешенные и неравноплечие), две правильные гири весом в 4 кг и 7 кг, а также мешок муки. Требуется точно отвесить 3 кг муки.

Задача 30б. Даны неправильные чашечные весы (не уравновешенные и неравноплечие) и правильные гири весом в 3 кг, 7 кг, 10 кг, 15 кг, 20 кг, 22 кг, 30 кг, 40 кг, а также мешок муки. Требуется точно отвесить 1кг муки за два взвешивания, причем все гири должны быть использованы.

Задача 30в. (см. [8], [9]) Человек стоит внутри магазина и видит на стеклянной витрине надпись:

6SIX9

Какую надпись он увидит, выйдя из магазина, в луже под витриной?

Задача 30г. (см. [8], [9]) Используя любые символы (например, буквы русского и латинского алфавитов, цифры, математические знаки и др.) напишите на листке бумаги последовательность символов, которые будут испытывать ***шесть различных кажущихся преобразований при переворачивании листка «вверх ногами».***

Задача 31. (см. [10], [12]) Пусть К – прозрачный куб размером $n \times n \times n$, составленный из единичных прозрачных кубиков. Спрашивается: какое наибольшее количество «трехмерных» ладей можно расставить в имеющихся прозрачных кубиках, чтобы они не били друг друга? (Трехмерные ладьи ходят, во-первых, как обычные ладьи, а кроме того, еще и по вертикали.)

Задача 32. Пусть П – прозрачный прямоугольный параллелепипед размером $m \times n \times p$, где $m<n<p$, составленный из единичных прозрачных кубиков. Спрашивается: какое наибольшее количество «трехмерных» ладей можно расставить в имеющихся прозрачных кубиках, чтобы они не били друг друга? (Трехмерные ладьи ходят, во-первых, как обычные ладьи, а кроме того, еще и по вертикали.)

Задача 33. (см. [12]) На прямоугольную шахматную доску размером mxp (где $m \le p$) поставили ладью. Какое наименьшее число поворотов должна будет сделать ладья при условии, что ей нужно обойти все клетки на доске? (Возвращаться в исходную клетку не обязательно.)

Задача 34. (см. [12]) Пусть К – прозрачный куб размером $n \times n \times n$ (где n – четное), составленный из единичных прозрачных кубиков. Доказать, что можно так расставить $n^2/2$ «трехмерных» ладей в имеющихся прозрачных кубиках, чтобы все остальные (не занятые ладьями) кубики были «под прицелом» хотя бы одной из расставленных ладей. (Трехмерные ладьи ходят, во-первых, как обычные ладьи, а кроме того, еще и по вертикали.)

Задача 35 (см. [12]) Пусть К – прозрачный куб размером nxnxn (где n –нечетное), составленный из единичных прозрачных кубиков. Доказать, что можно так расставить $(n^2 + 1)/2$ «трехмерных» ладей в имеющихся прозрачных кубиках, чтобы все остальные (не занятые ладьями) кубики были «под прицелом» хотя бы одной из расставленных ладей. (Трехмерные ладьи ходят, во-первых, как обычные ладьи, а кроме того, еще и по вертикали.)

Загадка. (см. [5], где читатель может найти ответ) Расположим все (без пропусков) четные и нечетные числа в их естественном порядке. Верно ли, что:

а) между любыми двумя четными числами найдется хотя бы одно нечетное?

б) между любыми двумя нечетными числами найдется хотя бы одно четное?

Часть II. РЕШЕНИЯ

1. *Четверо друзей (Медведь, Волк, Заяц и Лиса) купили волшебный пылесос. Медведь внес 2/7 от того, что внесли все остальные, Волк внес 1/8 от того,что внесли остальные, Заяц внес в 2 два раза больше, чем внесли остальные. Кто внес больше денег – Волк или Лиса?*

Решение. Эта задача кажется, на первый взгляд, сложной и громоздкой, требующей составления системы из трех уравнений для четырех неизвестных. Однако у нее имеется очень простое арифметическое решение, основанное на геометрических соображениях. Заметим, прежде всего, что доля, внесенная Медведем, составляет на самом деле 2/9 от общей стоимости волшебного пылесоса (см. рис. 1).

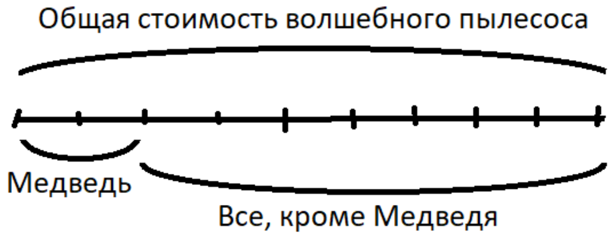


Рис. 1

Аналогично, доля, внесенная Волком, составляет 1/9 от общей стоимости пылесоса (см. рис. 2).

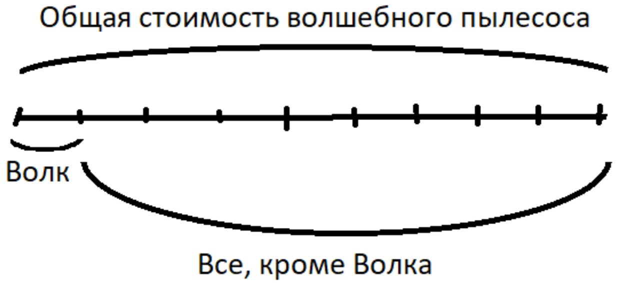


Рис. 2

Вместе Медведь и Волк внесли, таким образом,

$$2/9 + 1/9 = 1/3$$

от общей стоимости пылесоса. Что касается Зайца, то он, очевидно, внес не меньше, чем 2/3 от общей стоимости. Но больше двух третей он внести не мог, следовательно, Заяц внес недостающие 2/3 от общей стоимости пылесоса. Таким образом, Лиса не внесла ничего, что и завершает решение задачи.

2. *Четверо друзей (Медведь, Волк, Заяц и Лиса) купили волшебный пылесос. Медведь внес 2/7 от того, что внесли все остальные, Волк внес 1/8 от того, что внесли остальные, Заяц внес ½ от того, что внесли остальные, Лиса внесла 100 рублей. Сколько стоил пылесос?*

Решение. Рассуждая, как в предыдущей задаче, получаем, что Медведь и Волк вместе внесли 1/3 от общей стоимости пылесоса. Далее, из условия задачи легко следует, что Заяц также внес 1/3 от общей стоимости пылесоса (см. рис. 3).

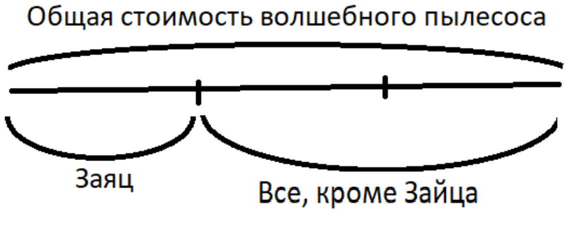


Рис. 3

Таким образом, заключаем, что Лиса внесла оставшуюся треть стоимости пылесоса. Однако из условия задачи мы знаем, что Лиса внесла 100 рублей. Следовательно, волшебный пылесос стоил в 3 раза больше, чем заплатила Лиса, т.е. 300 рублей.

3. (см. [2]) *Пятеро волчиц – Белла, Велла, Гелла, Делла и Елла – пели волшебные песни, причем ни одна песня не исполнялась дважды. Каждый раз пели вчетвером, а пятая волчица аккомпанировала им на гитаре. Елла пела 8 раз (больше всех); Белла, Велла и Гелла пели одинаковое количество раз, а Делла пела 3 раза (меньше всех). Сколько песен было спето?*

Решение. Необычность этой задачи в том, что для ее решения приходится подсчитывать «объекты», как бы затененные данными задачи. Действительно, какие объекты «сами напрашиваются» на то, чтобы их подсчитали:

а) волчицы (но подсчитывать их бессмысленно, мы и так знаем, что их пять);

б) спетые песни (непонятно только, как их подсчитать);

в) выступления волчьих квартетов (тоже прекрасный объект для подсчета, но как подсчитывать – непонятно).

И все-таки самые важные объекты, к подсчету которых нужно и можно подступиться, мы упустили. Объекты эти – «волко-песни». Иными словами, при нашем подсчете каждая песня будет засчитываться столько раз, сколько волчиц ее спели. Теперь внимание! Мы знаем, что каждую песню волчицы пели вчетвером, но для подсчета числа N всех «волко-песен» просто взять и умножить количество песен на 4 мы сейчас не можем, так как количество песен нам как раз и неизвестно.

Как же быть? Подойдем к решению этого вопроса с другой стороны. Мы знаем, например, что волчица Елла выступала 8 раз. Но это как раз и означает, что на ее счету ровно 8 «волко-песен». Итак, общее количество N всех «волко-песен», очевидно, может быть выражено формулой:

$$N = 8 + 3k + 3, \qquad (*)$$

где k – целое,

$$3 < k < 8. \qquad (**)$$

(В формуле (*) слагаемое 8 – количество выступлений Еллы, слагаемое 3 – число выступлений Деллы, множитель k – число выступлений каждой из остальных трех волчиц (Беллы, Веллы и Геллы.)

Выше мы уже заметили, что число N обязательно должно делиться на 4. Нетрудно проверить, что при условии (**) число N, даваемое формулой (*) делится на 4 только при $k = 7$. Итак,

$$N = 8 + 3\cdot 7 + 3 = 32,$$

откуда следует, что число выступлений волчьих квартетов равно

$$N/4 = 8.$$

Тем самым и число песен оказывается равным 8 (поскольку ни одна песня не повторялась).

Замечание. Из полученного ответа, кстати, следует, что Елла выступала каждый раз.

Замечание. Найденное решение нуждается в проверке, поскольку в явном виде распределение волчиц по выступлениям не было представлено. (Тем самым мы не исключили возможность того, что у задачи отсутствует решение.) Построение соответствующей таблицы с перечислением выступлений волчиц предоставляется читателю.

Замечание. На рис. 4 изображена графическая модель решения задачи 3.

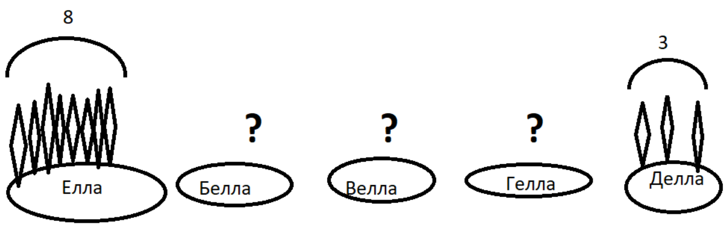


Рис. 4

3а. *Пятеро волчиц – Белла, Велла, Гелла, Делла и Елла – пели волшебные песни, причем ни одна песня не исполнялась дважды. Каждый раз пели втроем, а оставшиеся две волчицы аккомпанировали им на гитарах. Елла пела 108 раз; Белла, Велла и Гелла пели одинаковое количество раз, а Делла пела 103 раза. Могло ли так быть?*

Решение. Так быть не могло. Действительно, общее число N волко-песен, очевидно, должно равняться

N = 108 + 3k + 103.

Очевидно, что это число на 3 не делится. Однако из условия задачи следует, что N должно делиться нацело на 3 (поскольку каждый раз волчицы пели втроем). Противоречие.

3б. *На планете Тральфамадор расположились три королевства. (При этом местным жителям разрешалось иметь более одного гражданства и никаких других жителей, кроме граждан этих королевств, на планете не было.) В первых двух королевствах было по 600 граждан, а в третьем – 300 граждан. Кроме того, известно, что ровно одним гражданством обладали 200 жителей, ровно двумя гражданствами – еще 200 жителей, а у остальных было по три гражданства. Сколько всего жителей было на планете Тральфамадор?*

Решение. Эта задача похожа на предыдущую тем, что вся «соль» ее решения состоит в правильном выборе объектов для подсчета. В данной задаче такими удобными объектами будут паспорта жителей (каждому жителю при оформлении гражданства вручался соответствующий паспорт). Нетрудно понять, что общее количество паспортов на планете равно сумме чисел подданных всех трех королевств:

$$600 + 600 + 300 = 1500. \qquad (*)$$

С другой стороны, обозначая общее число жителей на планете через S, получаем из условий задачи, что общее число паспортов должно быть равно сумме

$$1\cdot 200 + 2\cdot 200 + 3\cdot(S - 200 - 200) = 3S - 600. \qquad (**)$$

Приравнивая правые части соотношений (*) и (**), приходим к уравнению относительно величины S:

$$1500 = 3S - 600,$$

откуда

$$S = 700 \text{ (жителей)}.$$

Замечание. Итак, общее число жителей на Тральфамадоре мы узнали. При этом само распределение гражданства по трем королевствам мы не искали. Например, возможно распределение, приведенное на рис. 4а.

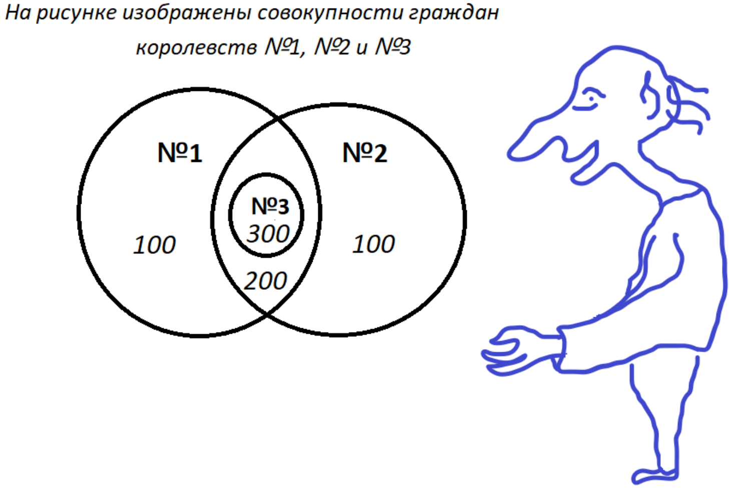


Рис. 4а

На этом рисунке изображено именно распределение гражданства (круги обозначают именно совокупности граждан упомянутых королевств, а не географическое расположение государств).

3в. *Баба-Яга разводила Говорящих котов, каждый из которых владел хотя бы одним из следующих трех языков: английский, французский, японский. Английским языком владели 6 котов, столько же котов говорили по-французски, а по-японски говорить умели только три кота. Кроме того, известно, что ровно одним языком владели два кота, ровно двумя языками – еще два кота, а остальные коты умели разговаривать на трех языках. Сколько всего Говорящих котов жило у Бабы-Яги?*

Ответ: 7 котов.

4. *Когда Зайцу было столько лет, сколько Лисе теперь, он был старше Лисы в 10 раз. Сейчас им вместе 29 лет. Сколько лет каждому?*

Решение *(алгебраическое).* Задачи такого типа удобно решать алгебраически, предварительно сведя все данные задачи в единую таблицу. Обозначим через x нынешний возраст Зайца, а через y – нынешний возраст Лисы.

Тогда условие задачи можно компактно записать в виде следующей таблицы:

	Заяц	Лиса
теперь	x	y
тогда	y	y/10

Так как разница в возрасте не меняется с течением времени, мы можем сразу записать первое уравнение:

$x - y = y - y/10$,

откуда

$x = 19y/10$. (*)

Второе уравнение, вытекающее из условий задачи, очевидно, имеет вид:

$x + y = 29$.

Подставляя сюда выражение для x из (*), получаем

$19y/10 + y = 29$,

откуда получаем искомый результат:

$y = 10$ (лет), $x = 19$ (лет).

Замечание. Эта задача допускает также арифметическое решение, основанное на использовании диаграммы «в отрезках». Приведем соответствующую диаграмму (см. рис. 5).

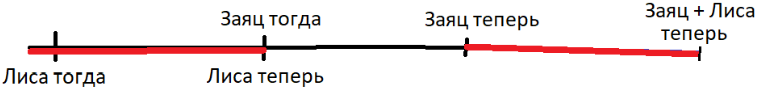


Рис. 5

5. *Когда Попугаю будет столько лет, сколько Черепахе теперь, Черепаха будет старше Попугая в полтора раза, а вместе им будет 50 лет. Сколько лет каждому сейчас?*

Решение. Снова воспользуемся алгебраическим методом и составим таблицу, устроенную аналогично предыдущей. (Через x обозначим возраст Черепахи теперь, а через y – возраст Попугая теперь.)

	Черепаха	Попугай
теперь	x	y
будет	3x/2	x

Поскольку разница в возрасте Черепахи и Попугая сохраняется с течением времени, сразу же получаем первое уравнение:

$x - y = 3x/2 - x,$

откуда имеем:

$y = x/2.$ (*)

Далее, из условия задачи следует, что

$3x/2 + x = 50.$

Отсюда и из (*) окончательно получаем:

x = 20 (лет), y = 10 (лет).

5a. *Попугай и Черепаха живут в параллельных мирах. В мире, где живет Черепаха, время идет в обратную сторону. Когда Попугаю будет столько лет,* *сколько Черепахе теперь, Черепаха будет моложе Попугая в полтора раза, а вместе им будет 50 лет. Сколько лет каждому сейчас?*

Решение. Составим таблицу, устроенную аналогично предыдущей. (Через x обозначим возраст Черепахи теперь, а через y – возраст Попугая теперь.)

	Черепаха	Попугай
теперь	x	y
будет	$2x/3$	x

Поскольку сумма возрастов Черепахи и Попугая сохраняется с течением времени, сразу же получаем первое уравнение:

$$x + y = 2x/3 + x,$$

откуда имеем:

$$y = 2x/3. \qquad (*)$$

Далее, из условия задачи следует, что

$$2x/3 + x = 50.$$

Отсюда и из (*) окончательно получаем:

$x = 30$ (лет), $y = 20$ (лет).

6. *Слон съедает горку бананов за 1 час. Сорок обезьян съедают такую же горку бананов за 2 часа. За какое время съедят эту же горку бананов слон и 80 обезьян?*

Решение. Нетрудно понять, что 80 обезьян съедят горку бананов вдвое скорее, чем 40 обезьян, а именно – за 1 час. Итак, 80 обезьян поедают бананы с такой же скоростью, как один слон. Отсюда ясно, что слон вместе с 80 обезьянами справятся с горкой бананов за полчаса.

7. *Слон съедает горку бананов за 1 час. Сорок обезьян съедают такую же горку бананов за 7 часов. За какое время съедят эту же горку бананов слон и 70 обезьян?*

Решение. Десять обезьян будут есть горку бананов в четыре раза дольше, чем сорок обезьян, и съедят ее за 28 часов. Далее, 70 обезьян съедят горку бананов в 7 раз быстрее, чем десять обезьян, т.е. съедят ее за 4 часа.

Итак, в течение 4-х часов слон способен съесть 4 горки бананов, а 70 обезьян – 1 горку бананов. Таким образом, обедая совместно, они (слон и 70 обезьян) за 4 часа способны съесть 5 горок бананов. Для того, чтобы совместно съесть 1 горку бананов им потребуется в 5 раз меньше времени, т.е. 4/5 часа.

7а. *Корова съедает стог сена за 7 дней, овца – за 11 дней, а коза – за 13 дней. За какое время корова, овца и коза съедят стог сена, если будут есть его одновременно?*

Решение. Наименьшее общее кратное чисел 7, 11 и 13 равно их произведению (поскольку это простые числа) и равно 1001. За 1001 день корова съест

1001 : 7 = 143 стога, овца съест 1001 : 11 = 91 стог, а коза съест 1001 : 13 = 77 стогов. Всего они съедят за 1001 день 143 + 91 + 77 = 311 стогов. Следовательно, для того, чтобы совместно съесть один стог, корове, овце и козе потребуется

1001 : 311 = 3,218… (дней).

7б. Иванушка-дурачок может нарисовать портрет Василисы Премудрой за 7 дней, Илья Муромец – за 11 дней, а Кощей Бессмертный – за 13 дней. За какое время Иванушка-дурачок, Илья Муромец и Кощей смогут нарисовать портрет Василисы Премудрой, если будут рисовать его вместе?

Решение. Работая над портретом совместно, Иванушка-дурачок, Илья Муромец и Кощей, будут не помогать друг другу, а мешать. Скорее всего, им вообще не удастся нарисовать портрет Василисы.

7в. *В стране Тьмутаракании все бассейны наполняются не водой, а киселем. Из первой трубы бассейн заполняется доверху киселем за 2 часа, из второй трубы – за 5 часов, а по третьей трубе весь кисель вытекает из полного бассейна за 3 часа. Пер-*

воначально бассейн пуст; после того, как будут открыты все три трубы, за какое время бассейн заполнится доверху киселем?

Решение. Вычислим Наименьшее Общее Кратное чисел 2, 5, 3. Оно, очевидно, равно их произведению, т.е. 30. За 30 часов первая труба, работая в одиночку, может наполнить 30 : 2 = 15 бассейнов; вторая труба, работая в одиночку, за 30 часов может наполнить 30 : 5 = 6 бассейнов. При этом третья труба, работая в одиночку, за те же 30 часов может опустошить 30 : 3 = 10 бассейнов. Таким образом, все три трубы, работая вместе, могут за 30 часов наполнить 15 + 6 – 10 = 11 бассейнов.

Замечание. Чтобы лучше это уяснить, представим себе, что у нас имеется множество пустых и множество полных бассейнов. Тогда, подключая третью трубу к полным бассейнам, а первую и вторую – к пустым, получим, что количество полных бассейнов увеличится за 30 часов как раз на 15 + 6 – 10 = 11. Итак, общий объем жидкости, набравшейся в наши бассейны, оказывается равен 11 полным бассейнам. Этот объем не зависит от того, будут ли три трубы подключаться каждый раз к одному и тому же бассейну или к разным. В итоге, чтобы наполнить один бассейн, трем совместно работающим трубам понадобится в 11 раз меньше времени, т.е. 30/11 (часов).

8. (см. [3]) *Пес Шарик добегает от пункта А до пункта В за 1 час. Кот Мурзик добегает от пункта В до пункта А за 2 часа. Через какое время они встретятся, если одновременно выбегут навстречу друг другу? (См. рис. 6.)*

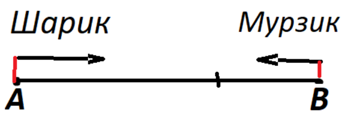


Рис. 6

Решение. Обозначим через S длину пути от A до B и посмотрим, какова общая (суммарная) длина пути, который могут пробежать Шарик и Мурзик за 2 часа. Очевидно, Шарик сможет пробежать путь длины 2S, а Мурзик – путь длины S; таким образом, суммарная длина их общего пробега будет равна 3S. Перейдем теперь к ситуации, описанной в условии задачи, когда суммарная длина пробега Шарика и Мурзика должна, очевидно, равняться S. Ясно, что при этом будет затрачено в 3 раза меньше времени, чем при суммарной длине пробега 3S. Итак, Шарик и Мурзик, выбежав навстречу друг другу, встретятся через 2/3 часа.

8а. *Пес Шарик добегает от пункта А до пункта В за 1 час. Кот Мурзик добегает от пункта В до пункта А за 2 часа. Шарик и Мурзик одновременно выбежали навстречу друг другу; при этом муха, сидевшая* *на носу у Шарика, взлетела и полетела навстречу Мурзику. Долетев до Мурзика, она тут же повернула назад и так летела до встречи с Шариком. Затем, долетев до Шарика, сразу же повернула в сторону Мурзика, и т.д. Так она летала со скоростью 90км/ч до тех пор, пока Шарик и Мурзик не встретились. Сколько километров пролетела муха?*

Ответ: муха пролетела 60 км.

8б. *Пес Шарик добегает от пункта А до пункта В за 1 час. Кот Мурзик добегает от пункта В до пункта А за 2 часа. Шарик и Мурзик одновременно выбежали навстречу друг другу; при этом муха, сидевшая на носу у Шарика, взлетела и полетела навстречу Мурзику со скоростью 90 км/ч. Одновременно с мухой, шершень, сидевший на носу у Мурзика, тоже взлетел и полетел навстречу Шарику со скоростью 120 км/ч. Встретившись в воздухе, муха и шершень развернулись и полетели обратно. Долетев, соответственно, до Шарика и Мурзика, они снова развернулись и полетели навстречу друг другу, и т.д. Так они летали (разворачиваясь либо при встрече друг с другом в воздухе, либо долетев до своих «хозяев») до тех пор, пока Шарик и Мурзик не встретились. Сколько километров пролетел шершень?*

Ответ: шершень пролетел 80 км.

9. *Пес Шарик добегает от пункта А до пункта В за 1 час. Кот Мурзик добегает от пункта В до пункта А за 2 часа. Через какое время расстояние между ними удвоится, если они одновременно выбегут в противоположные стороны? (См. рис. 7.)*

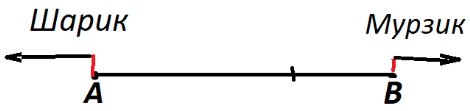


Рис. 7

Решение. Рассуждая точно так же, как в задаче 8, получаем, что расстояние между Шариком и Мурзиком удвоится через 2/3 часа.

10. *Пес Шарик добегает от пункта А до пункта В за 1 час. Кот Мурзик добегает от пункта В до пункта А за 7 часов. Шарик и Мурзик выбежали одновременно, соответственно из пунктов А и В, причем Мурзик бежит в сторону, противоположную пункту А, а Шарик его догоняет. Сколько времени понадобится Шарику, чтобы догнать Мурзика? (См. рис. 8.)*

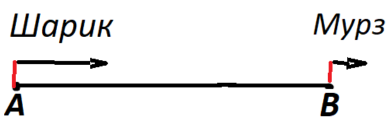


Рис. 8

Решение. Снова обозначим через S расстояние между пунктами А и В. Нетрудно видеть, что скорость Мурзика в 7 раз меньше, чем скорость Шарика. Следовательно, разность скоростей Шарика и Мурзика будет составлять 6/7 от скорости Шарика. Именно с такой скоростью будет сокращаться первоначальное расстояние S между двумя бегунами. Таким образом, Шарику понадобится в 7/6 раз больше времени, чтобы догнать Мурзика, чем для того, чтобы добежать от пункта А до пункта В. Итак, Шарик догонит Мурзика через 7/6 часа, т.е. через 1ч 10 мин.

Проверим найденный ответ. За 1 час Шарик добежит до пункта В, а Мурзик удалится от пункта В (в сторону, противоположную пункту А) на расстояние S/7. Далее, за 10 минут (т.е за 1/6 часа) Шарик пробежит расстояние S/6 и тем самым окажется на расстоянии S/6 от пункта В. Что касается Мурзика, то за 10 минут (т.е. за 1/6 часа) он пробежит расстояние, равное $S/(7\cdot 6)$. В результате Мурзик окажется на расстоянии $S/7 + S/(7\cdot 6) = S/6$ от пункта В, что и требовалось установить.

10а. (см. [1]) *Лисенок и Крысенок живут в одном доме и ходят в школу, причем Крысенок передвигается быстрее, чем Лисенок. Как-то раз Крысенок вышел из дома на 10 минут позже, чем Лисенок, догнал его на середине пути и отправился дальше. На* *сколько минут раньше, чем Лисенок, Крысенок прибыл в школу?*

Решение. Эта задача предназначена тем, кто умеет строить графики равномерного движения. Из симметрии получающейся картинки следует, что Крысенок придет в школу раньше Лисенка на 10 минут. Но даже и те школьники, кто не знаком с построением графиков равномерного движения, могут догадаться, что задача симметрична. Действительно, рассмотрим ситуацию, когда Лисенок дошел до дверей школы (а Крысенок уже пришел туда раньше), и заставим время двигаться назад. Очевидно, что оба зверя встретятся именно там, где они встретились, когда время шло вперед, т.е. посередине пути. Отсюда ясно, что Крысенок должен был прийти в школу на 10 минут раньше Лисенка, тогда при времени, текущем назад, он отправится из школы домой позже на те же 10 минут.

10б. *Лисенок и Крысенок живут в одном доме и ходят в школу, причем Крысенок передвигается быстрее, чем Лисенок. Как-то раз Крысенок вышел из дома на 10 минут позже, чем Лисенок, догнал его, проделав две трети пути, и отправился дальше. На сколько минут раньше, чем Лисенок, Крысенок прибыл в школу?*

Решение. Как и предыдущая задача, эта задача в первую очередь предназначена ученикам, умеющим строить графики равномерного движения. Построив соответствующие графики, можно сразу воспользоваться подобием возникающих треугольников и прийти к выводу, что Крысенок прибудет в школу на 5 минут раньше Лисенка. Однако эту задачу можно решить, и не обращаясь к построению графиков движения. Действительно, обозначим через S расстояние от дома (где живут Лисенок и Крысенок) до школы, а через v – разность скоростей Крысенка и Лисенка. Мы видим, что движение со скоростью v преодолевает расстояние 2S/3 за 10 минут. Расстояние от школы до места встречи Крысенка и Лисенка равно, очевидно, S/3. Начнем теперь, с момента прихода Лисенка в школу смотреть фильм о наших зверятах, запустив время (кинопленку) в обратную сторону. Очевидно, что расстояние S/3 будет преодолено движением со скоростью v за вдвое меньшее время, чем потребовалось Крысенку, чтобы догнать Лисенка, выходя из дома.

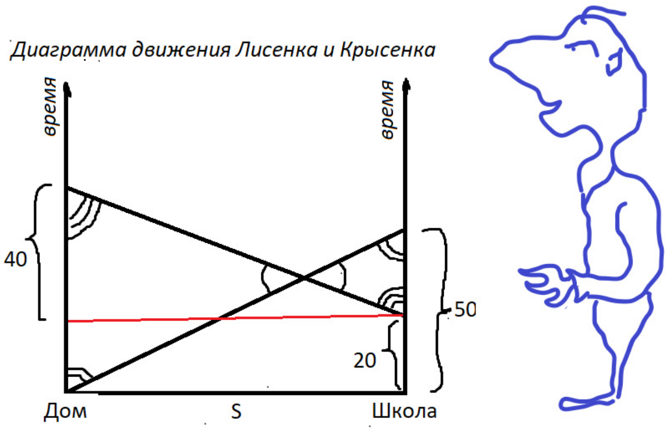
10в. *Лисенок отправился из дома в школу, а Крысенок пошел из школы домой. При этом Крысенок вышел из школы на 20 минут позже, чем Лисенок вышел из дома. Встретились они ровно посередине дороги, соединяющей школу и дом. Кто и на сколько раньше доберется до цели своего маршрута – Лисенок или Крысенок?*

Решение. Нетрудно понять, что Крысенку понадобится на преодоление второй половины пути снова на 20 минут меньше, чем Лисенку (как и на преодоление первой половины пути). Итак, Крысенок окажется дома ровно на 20 минут раньше, чем Лисенок доберется до школы.

10г. *Лисенок отправился из дома в школу, а Крысенок пошел из школы домой. При этом Крысенок вышел из школы на 20 минут позже, чем Лисенок вышел из дома. Вся дорога заняла у Лисенка 50 минут, а у Крысенка 40 минут. Длину всей дороги от дома до школы обозначим через S. На каком расстоянии от школы встретились Лисенок и Крысенок?*

Решение. Из условий задачи сразу следует, что от выхода Лисенка из дома до прихода домой Крысенка прошло время T = 60 минут (60 = 20 + 40). Далее, из условий задачи следует также, что от выхода Крысенка из школы до прихода в школу Лисенка прошло время T’ = 30 минут (30 = 50 – 20). Итак, отношение T/T’ = 2. Отсюда геометрически очевидно (см. диаграмму движения Лисенка и Крысенка), что точка их встречи находилась в два раза дальше от дома, чем от школы.

Замечание. Фактически мы столкнулись со следующей любопытной ситуацией. При любых числовых параметрах, входящих в условие задачи, отношение двух времен оказывается равным отношению двух расстояний. Это совершенно понятно, когда речь идет об *одном* равномерно движущемся объекте. Но в этой задаче такого единого объекта нет!



Замечание. Фактически мы столкнулись со следующей любопытной ситуацией. При любых числовых параметрах, входящих в условие задачи, отношение двух времен оказывается равным отношению двух расстояний. Это совершенно понятно, когда речь идет об *одном* равномерно движущемся объекте. Но в этой задаче такого единого объекта нет!

10д. *Фермер живет на вершине холма, а его Друг – у подножья холма. В доме у Фермера имеются напольные часы с маятником (эти часы невозможно даже сдвинуть с места), а никаких других часов нет (интернета тоже нет). У его Друга тоже нет интернета и никаких других часов, кроме таких же напольных. Как-то раз, в пасмурный день, напольные часы Фермера остановились, т.к. он забыл их завести. Не имея возможности определить время хотя бы приблизительно по солнцу, Фермер, побывав у своего Друга, все же установил приближенное время на своих часах. На следующий день Фермер снова отправился к своему Другу в гости и обнаружил, что теперь напольные часы его Друга остановились, т.к. не были вовремя заведены. Тем не менее, Фермер помог своему Другу установить точное время на его часах. Как ему это удалось?*

Решение. Обнаружив, что его часы остановились, Фермер завел свои часы и отправился к Другу. Там он увидел на напольных часах точное время T_0 и сразу же пошел домой. По своим напольным часам Фермер определил, сколько времени он отсутствовал. Длительность путешествия Фермера складывается из двух временных интервалов: времени t спуска с холма и времени T подъема на холм; очевидно, что $t < T$. Далее фермер установил приближенное время T'_1 на своих часах, пренебрегая различием между временем подъема на холм и временем спуска:

$T'_1 = T_0 + (t + T)/2.$ (*)

Это время, очевидно, отличается от точного времени T_1 возвращения Фермера домой:

$T_1 = T_0 + t.$

Будем для простоты считать, что Фермер, посмотрев на свои часы, сразу же снова отправился к своему Другу, у которого как раз остановились к этому моменту часы. Фермер предложил установить «хотя бы приближенное время» на часах Друга, прибавив к приближенным показаниям своих часов (*) приближенное время, затраченное на дорогу (спуск с холма):

$T_2 = T'_1 + (t + T)/2 = T_0 + t + T.$ (**)

Однако время (**), очевидно, оказывается точным.

Замечание. Здесь представлена неклассическая формулировка известной задачи. В классической формулировке Фермер и его Друг живут на равнине, и Фермер может установить точное время на собственных часах.

10е. *Имеется электронное табло, которое всегда показывает точное время, а также обычные часы со стрелками. Ровно в полночь на часах со стрелками установили точное время; затем с помощью* *табло выяснилось, что каждые 66 минут часовая и минутная стрелки на них совпадают. Спешат, отстают или идут точно часы со стрелками?*

Решение. Рассмотрим вначале Идеальные часы со стрелками и выясним, как будут на них располагаться часовая и минутная стрелки друг относительно друга в 1 ч 06 мин.

Минутная стрелка, очевидно, пройдет ровно 6 «минутных» делений после положения «вертикально вверх» (т.е. всего пойдет 66 «минутных» делений после полуночи). Что касается часовой стрелки, то для нее каждое «минутное» деление соответствует прохождению 12 минут. Таким образом, на Идеальных часах со стрелками часовая стрелка за 66 минут после полуночи не успеет сдвинуться на 6 малых («минутных») делений, поскольку это означало бы, что прошло 6×12 = 72 минут (а не 66 минут). Это, в свою очередь, значит, что на Идеальных часах впервые после полуночи минутная и часовая стрелки совпали не через 66 минут, а раньше. Отсюда сразу следует, что тестируемые обычные часы со стрелками отстают.

Замечание. Аналогичные рассуждения показывают, что если на тестируемых часах стрелки совпадают каждые 65 минут, то эти часы спешат. Действительно, на Идеальных часах со стрелками спустя 65 минут после полуночи часовая стрелка пройдет чуть больше пяти «минутных» делений, и минутная стрелка не успеет ее догнать. Первое после полуночи совпадение стрелок на Идеальных часах произойдет позже, когда пройдет больше 65 минут. Следовательно, тестируемые часы (когда у них впервые после полуночи совпадают стрелки) на самом деле показывают время, большее 65 минут, т.е. они спешат.

10ж. *На инопланетных часах обе стрелки (часовая и минутная) движутся с правильными скоростями. Однако часовая стрелка вращается в правильном направлении, а минутная – в противоположном (т.е. «против часовой стрелки»). Сколько раз в сутки такие часы показывают правильное время?*

Решение. Прежде всего, заметим, что инопланетные часы показывают верное время каждый раз, когда минутная стрелка направлена вертикально вверх (указывает на число 12). Итак, у нас уже имеется частичный суточный набор правильных показаний инопланетных часов:

00:00, 01:00, …, 22:00, 23:00. (*)

Время 24:00 относится уже к следующим суткам, однако интервал

от 23:00 до 24:00

нас, очевидно, будет интересовать. Рассмотрим, в качестве примера, временной интервал

от 05:00 до 06:00. (**)

На обоих краях этого временного интервала инопланетные часы показывают правильное время. Посмотрим, будут ли эти часы (и, если будут, то сколько раз) показывать правильное время строго внутри интервала (**). Геометрически очевидно, что внутри этого часового интервала инопланетные часы будут показывать правильное время ровно 1 раз. Всего часовых интервалов в сутках имеется, очевидно, 24. Строго внутри каждого из них инопланетные часы будут показывать правильное время в точности по 1 разу. Кроме того, набору времен (*) соответствует еще 24 правильных показания инопланетных часов. Итак, в течение суток инопланетные часы будут показывать правильное время ровно 48 раз.

10з. *На инопланетных часах обе стрелки (часовая и минутная) движутся с правильными скоростями. Однако часовая стрелка вращается в неправильном направлении, а минутная – в правильном. Сколько раз в сутки такие часы показывают правильное время?*

Ответ: 48 раз.

10и. *Самые обычные часы спешат на одну минуту в сутки. Ровно в полночь на них установили правильное время. Когда они в следующий раз покажут правильное время?*

Решение. Часы снова покажут правильное время, когда убегут вперед на 12 часов. Чтобы убежать на час вперед, этим часам потребуется 60 суток. А чтобы убежать на 12 часов вперед, им потребуется 720 суток.

10к. *Спускаясь по эскалатору, движущемуся вниз, человек насчитал 25 ступенек. Поднимаясь по эскалатору, движущемуся вниз, человек насчитал 75 ступенек. Сколько ступенек на покоящемся эскалаторе?*

Решение. Обозначим длину покоящегося эскалатора через A, скорость перемещения человека относительно эскалатора через v, скорость эскалатора через w. (Длину эскалатора измеряем в ступеньках, скорости – в ступеньках в секунду.)

Тогда из условия задачи получаем два уравнения:

$$A/(v + w) = 25/v,$$

$$A/(v - w) = 75/v,$$

откуда имеем

$$v/A + w/A = v/25,$$

$$v/A - w/A = v/75.$$

Складывая два последних уравнения, находим:

$$v/A = [v/25 + v/75]/2,$$

откуда

$$A = 2/[1/25 + 1/75] = 37{,}5.$$

Итак, двигаясь по неподвижному эскалатору, человек насчитает 37 полных ступенек.

10л. *(Эту задачу нужно решить арифметическим способом.) Из города А в город Б в момент времени Т выбежал Волк. Вскоре после этого из города Б в город А навстречу Волку с той же скоростью выбежала Лиса. Известно, что Лиса добралась до города А в момент времени Т'. Спрашивается, в какой момент времени Волк и Лиса встретились?*

Решение. Так как скорости Волка и Лисы совпадают, то к моменту встречи Волку осталось бежать столько времени, сколько уже бежала Лиса. Аналогичное утверждение справедливо и для Лисы. Отметим на оси времени точки Т и Т', а также момент t прибытия Волка в город Б и момент t' отправления Лисы из города Б.

Из соображений симметрии легко следует, что Волк и Лиса встретились в момент (Т + Т')/2.

11. *Только один Вася входит одновременно в состав 75 самых аккуратных учеников школы и в состав 50 самых неаккуратных учеников школы. Сколько учеников в школе?*

Решение. Для простоты будем считать, что все ученики в школе – разной степени аккуратности. (На самом деле, так оно всегда и бывает). Расположим всех этих учеников в ряд по возрастанию степени аккуратности слева направо. Таким образом, самые аккуратные будут стоять на правом краю нашей шеренги, а самые неаккуратные – на левом краю. Так как существует Вася, одновременно входящий в состав 75 самых аккуратных и 50 самых неаккуратных учеников, то никаких других учеников в школе, кроме вышеупомянутых 75 самых аккуратных и 50 самых неаккуратных, существовать не может. В результате заключаем, что общее количество учеников N в школе равно:

$$N = 75 + 50 - 1. \qquad (*)$$

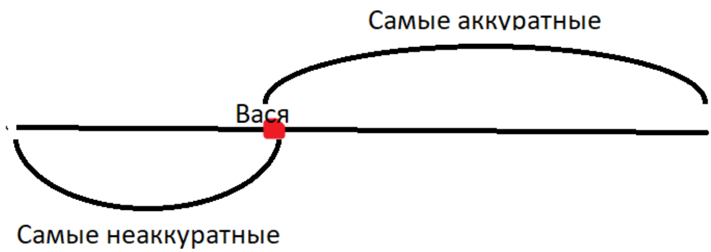


Рис. 9

(В формуле (*) ***единицу*** вычитаем из суммы 75 + 50, чтобы не посчитать Васю дважды; см. рис. 9.)

12. (см. [6]) *Из всех учеников школы только один Вася не входит одновременно в состав 70 самых аккуратных учеников и в состав 69 самых неаккуратных учеников. Сколько учеников в школе?*

Решение. Как и при решении предыдущей задачи, выстроим всех учеников школы в одну шеренгу таким образом, чтобы степень аккуратности учеников возрастала слева направо. Геометрически очевидно, что никаких других учеников, кроме 70 самых аккуратных, в школе быть не может. (При этом 69 самых неаккуратных учеников составляют часть семидесяти самых аккуратных; см. рис. 10.)

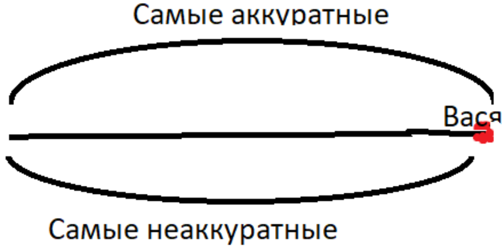


Рис. 10

12а. (см. [6]) *Из всех учеников школы только Маша, Паша и Саша не входят одновременно в состав 70 лучших учеников и в состав 68 худших учеников. Сколько учеников в школе?*

Ответ: В школе 71 ученик.

13. (см. [6]) *Из всех учеников школы только Вася и Петя не входят одновременно в состав 40 лучших и 40 худших учеников. Сколько учеников в школе?*

Решение. Как и при решении двух предыдущих задач, выстроим всех учеников школы в одну шеренгу таким образом, чтобы степень аккуратности учеников возрастала слева направо.

Геометрически очевидно, что в школе должен быть только один самый аккуратный ученик, не входящий в состав 40 самых неаккуратных, и только один самый неаккуратный ученик, не входящий в состав 40 самых аккуратных; см. рис. 11.

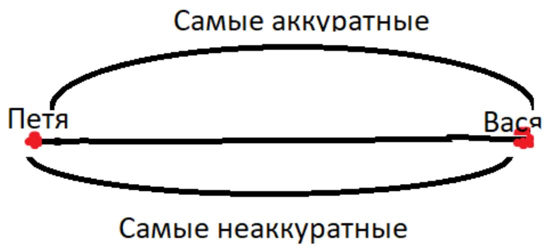


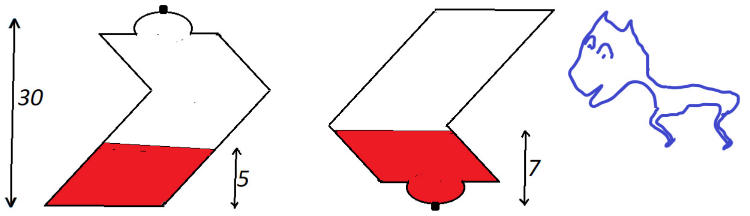
Рис. 11

В результате получаем ответ: в школе учится 41 ученик.

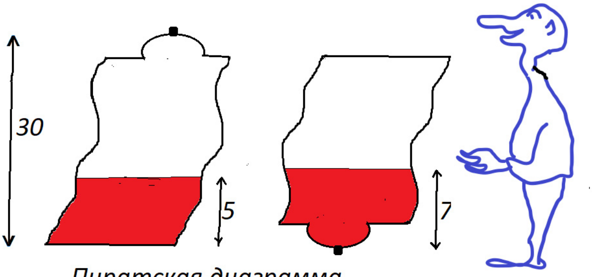
13а. *Из всех учеников школы только Маша, Паша, Саша и Даша не входят одновременно в состав 70 самых высоких учеников, в состав 69 самых низкорослых учеников и в состав 67 учеников среднего роста. Сколько учеников в школе? (Предполагается, что все ученики разного роста и выстроены в шеренгу по росту. «Средние» ученики отсчитываются одновременно в обе стороны от середины шеренги.)*

Ответ: В школе 71 ученик.

13б. *Пираты нашли прозрачную бутылку странной формы, запечатанную сургучной печатью и отчасти наполненную неизвестной красной жидкостью. Прежде чем распечатывать бутылку, пираты решили узнать, какую долю объема бутылки занимала жидкость (см. пиратскую диаграмму). Какой ответ у них получился?*



Пиратская диаграмма



Пиратская диаграмма
(вариант)

Решение.

[30 – (5+7)]:2 = 9;

$5 + 9 = 14;$

$14 + 14 = 28;$

$5 : 28 = 0{,}178\ldots$

13в. *Для приема делегатов Инопланетной Конференции построили прямоугольное 12-этажное здание, на каждом этаже которого были только одноместные номера. (Количество номеров на всех этажах было одинаковым.) Кроме того, построили кемпинг, состоявший из одноместных палаток. Когда прилетели инопланетяне, сначала решили их всех поселить в 12-этажном здании. Однако выяснилось, что самый верхний этаж оказывается незаселенным, если полностью заселить остальные этажи. Тогда решили переселить инопланетян в кемпинг; однако при этом оказалось, что все инопланетяне в кемпинге не помещаются, и приходится полностью заселять нижние три этажа 12-этажного здания. Какую долю от общего количества приготовленных мест заняли в результате инопланетяне?*

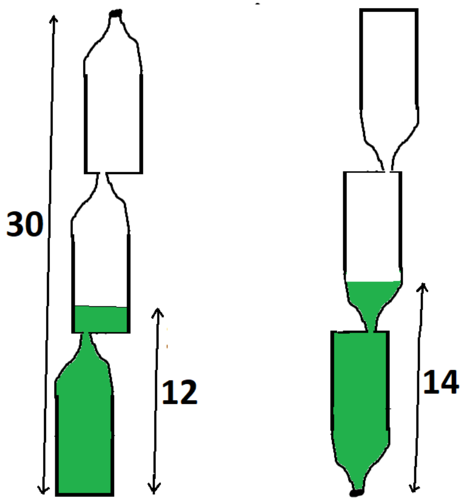
Решение. Если бы при заселении инопланетян в 12-этажное здание оставались незаселенными два верхних этажа (а не один), то тогда при заселении инопланетян в кемпинг потребовалось бы выделить не три этажа в 12-этажном здании, а на один этаж меньше, т.е. два. Отсюда сразу следует, что тогда инопланетяне занимали бы ровно половину всех выделенных для них мест. Иными словами, десять этажей 12-этажного здания составляют ровно половину всех мест, приготовленных для инопланетян. Поэтому прибывшие инопланетяне занимали 11/20 от общего числа приготовленных для их размещения мест.

13г. *Буратино нашел запечатанную сургучом бутылку странной формы (см. Диаграмму Буратино), в которой находилась красная жидкость с запахом лепестков роз. Прежде чем откупорить бутылку и вылить ее содержимое на голову Мальвины, Буратино решил узнать, какую часть от общего объема бутылки занимала красная жидкость. Какой ответ у него должен был получиться?*

Ответ: 1/8.

13д. *Буратино нашел запечатанную сургучом бутылку странной формы (см. Вторую Диаграмму Буратино), в которой находилась зеленая жидкость с запахом мимозы. Прежде чем откупорить бутылку и вылить ее содержимое на голову Мальвины, Буратино решил узнать, какую часть от общего объема бутылки занимала зеленая жидкость. Какой ответ у него должен был получиться?*

Вторая Диаграмма Буратино



Решение. Бутылка, найденная Буратино, состоит из трех одинаковых частей, ее мы будем называть «исходной тройной бутылкой», а ее составные части – «одинарными бутылками». Все длины, обозначенные на Второй Диаграмме Буратино, будем считать измеренными в сантиметрах.

Итак, приступим к вычислениям:

30 : 3 = 10 (высота в сантиметрах одинарной бутылки);

12 – 10 = 2 (высота в сантиметрах зеленой жидкости в цилиндрическом участке средней бутылки – на диаграмме слева);

14 – 10 = 4 (высота в сантиметрах зеленой жидкости в частично криволинейном участке средней перевернутой бутылки – на диаграмме справа).

Далее, геометрически очевидно, что *объем, заполненный зеленой жидкостью в средней одинарной бутылке на диаграмме слева, должен быть равен объему, заполненному зеленой жидкостью в средней перевернутой одинарной бутылке на диаграмме справа.*

Итак, объем исходной тройной бутылки состоит из шести частей: трех одинаковых «отчасти криволинейных частей» суммарной высотой 4 + 4 +4 = 12 и трех одинаковых цилиндрических частей суммарной высотой 30 – 12 = 18.

Как мы только что видели, каждая из трех отчасти криволинейных частей высоты 4 эквивалентна по своему объему цилиндрическому участку высоты 2. Таким образом, если заменим в тройной бутылке все ее «отчасти криволинейные части» на цилиндрические вдвое меньшей высоты, то общий объем бутылки не изменится.

При этом высота преобразованной тройной бутылки (которая приобретает цилиндрическую форму) станет равна 18 + 2 + 2 + 2 = 24.

Теперь мы, наконец, в состоянии ответить на вопрос, какую часть объема исходной тройной бутылки занимает зеленая жидкость. Прежде всего, как видно из левой части диаграммы, зеленая жидкость целиком заполняет одну одинарную бутылку, что уже составляет 1/3 от исходного общего объема. Кроме того, (см. диаграмму слева) зеленая жидкость поднялась на 2 сантиметра в цилиндрической части средней одинарной бутылки, что, очевидно составляет

$2/24 = 1/12$

от общего объема исходной тройной бутылки. Складывая, получаем ответ:

$1/3 + 1/12 = 5/12.$

14. *В банке сидели тараканы и девятиножки. Ученые биологи насчитали в банке всего 600 ног и 80 голов. Сколько было тараканов и сколько девятиножек?*

Решение. Если бы в банке сидели одни только тараканы (у которых по 6 ног), то всего ног было бы 480, в то время как по условию ног 600. В результате необходимо превратить некоторых тараканов в девятиножек, раздав им по тройке ножек. (У девятиножек, как известно, 9 ног.) Итак, лишних троек ног, которые необходимо раздать тараканам, превратив их в девятиножек, имеется

$(600 – 480)/3 = 40.$

В результате получаем ответ: в банке сидело 40 девятиножек и 40 тараканов.

14а. *Петя посадил в банку несколько пятиножек, пауков и девятиножек. Потм ученые биологи насчитали в банке всего 13 голов и 116 ног. Сколько оказалось в банке пятиножек, пауков и девятиножек?*

Решение. Если бы в банке сидели одни только девятиножки, то ног было бы 117. Одну девятиножку превращаем в паука, и задача решена. В банке сидели 12 девятиножек, один паук; пятиножек не было вовсе (они сбежали).

15. (см. [1]) *На собачьей выставке каждая собака укусила четырех посетителей, а каждый посетитель был укушен тремя собаками. Кого было больше – посетителей или собак?*

Решение. Обозначим через N общее число процессов кусания посетителей собаками, через П – число посетителей, а через С – число собак. Тогда из условия задачи следует, что:

N = 4C, N = 3П.

Отсюда, очевидно, имеем

4C = 3П.

Из полученного соотношения сразу следует, что П > С, т.е. посктителей было больше, чем собак.

16. *На выставке крокодилов каждый крокодил посмотрел на трех посетителей, а каждый посети-*

тель посмотрел на четырех крокодилов. Кого было больше крокодилов или посетителей?

Решение. Эта задача внешне похожа на предыдущую, но сходство это обманчиво. Если какой-то крокодил посмотрел на посетителя, то это вовсе не значит, что данный посетитель посмотрел на соответствующего крокодила. Могло случиться, например, так, что все крокодилы посмотрели на одних и тех же троих посетителей, а все посетители посмотрели на одних и тех же трех крокодилов. Поэтому данных задачи недостаточно, чтобы ответить на поставленный вопрос.

17. *Богатый раджа раздавал нищим деньги, всем поровну, так что каждый получил по 12 рупий. Если бы нищих было на 5 больше, то каждый получил бы на 3 рупии меньше. Сколько было нищих?*

Решение. Количество рупий, которые получили бы 5 новых нищих, очевидно, равно

$(12 – 3)\cdot 5 = 45.$

Очевидно, чтобы набрать эти 45 рупий, забирая по 3 рупии у каждого из прежних нищих, нужно, чтобы исходное количество нищих было равно

$45 : 3 = 15.$

18. *Богатый раджа раздавал нищим деньги поровну, каждому досталось по 10 рупий. Если бы* *нищих было на 3 меньше, то каждый получил бы на 5 рупий больше. Сколько было нищих?*

Решение. Если бы нищих было на 3 меньше, то количество с сэкономленных на них рупий равнялось бы 30. Распределить эти рупии поровну между остальными нищими, при условии, что каждому досталось бы по пять дополнительных рупий, можно лишь в случае, когда число оставшихся нищих равно

30 : 5 = 6.

Итак, исходное число нищих было равно 6 + 3 = 9.

19. *Богатый раджа раздавал нищим деньги поровну, всего он роздал 600 рупий. Если бы нищих было вдвое меньше, то каждый получил бы на 30 рупий больше. Сколько было нищих?*

Решение. Из условия задачи ясно, что каждому нищему было отдано именно 30 рупий. Поэтому общее число нищих оказывается равным

600 : 30 = 20 (чел.)

20. *Богатый раджа раздавал нищим деньги поровну, всего он роздал 300 рупий. Если бы нищих было вдвое больше, то каждый получил бы на 10 рупий меньше.* Сколько было нищих?

Решение. Из условия задачи очевидно, что каждому нищему было дано по 20 рупий.

Следовательно, число нищих равно

300 : 20 = 15 (чел.)

20а. *Богатый раджа раздавал нищим деньги поровну, всего он роздал 300 рупий. Если бы нищих было втрое больше, то каждый получил бы на 10 рупий меньше.* Сколько было нищих?

Решение. Из условия задачи очевидно, что 10 рупий составляли 2/3 от количества рупий, полученных каждым из нищих. Таким образом, каждый нищий получил

10 : 2/3 = 15 (рупий).

Теперь мы в состоянии узнать число нищих:

300 : 15 = 20 (чел.)

Замечание. Попробуем решить эту же задачу алгебраическим способом, составив уравнение относительно числа нищих (которое обозначим через x).

Имеем:

$$\frac{300}{x} = \frac{300}{3x} + 10,$$

откуда

300 = 100 + 10x,

и мы приходим к прежнему результату: x = 20.

21. *На бесконечной шахматной доске расставили в виде прямоугольника все имеющиеся в коробке изумрудные камни, в каждом горизонтальном ряду по*

10 изумрудов. Если бы в каждом вертикальном ряду было на 3 изумруда меньше, то длина каждого горизонтального ряда увеличилась бы на 5 изумрудов. Сколько было изумрудов?

Решение. Из условия задачи ясно, что количество вертикальных рядов равно 10. Число изумрудов, высвободившихся при укорочении каждого вертикального рядя на 3, очевидно, равно

$3 \cdot 10 = 30$

(см. рис. 12).

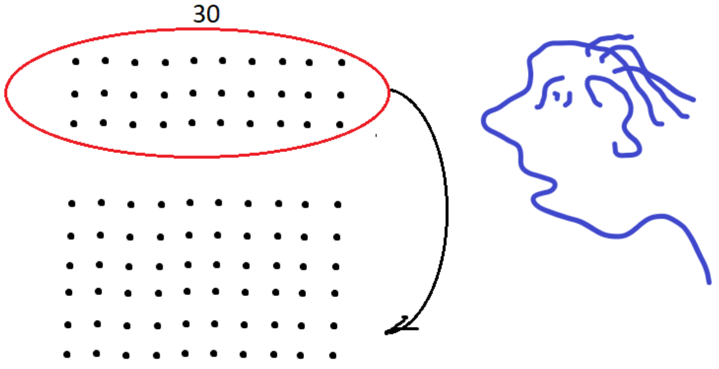


Рис. 12

Распределить эти 30 изумрудов по 5 штук между всеми имеющимися горизонтальными рядами можно лишь в случае, когда число *получившихся* горизонтальных рядов равно

$30 : 5 = 6.$

Однако число получившихся горизонтальных рядов, очевидно, равно числу *оставшихся* изумрудов в каждом вертикальном ряду. Итак, изначально в каждом вертикальном ряду количество изумрудов равно

$6 + 3 = 9.$

Таким образом, изначально изумрудами была занята прямоугольная таблица размером 10×9, т.е. общее количество изумрудов равно 90.

22. (см. [1]) *Перед самым началом Всемирных Соревнований по хоккею клюшки подорожали на 15%, а после окончания Соревнований подешевели на 14%. Когда клюшки стоили дороже – до начала Соревнований или после их окончания?*

Решение. Обозначим через x цену одной клюшки до подорожания. Тогда цена клюшки сразу же после подорожания станет равна $x(1 + 15/100)$, а после подешевения станет равна

$$x(1 + 15/100)(1 - 14/100) =$$
$$= x[1 + 15/100 - 14/100 - 15 \cdot 14/10000] =$$
$$= x[1 + 1/100 - 210/10000] = x[1 + 0{,}01 - 0{,}021] =$$
$$= x[1 - 0{,}011].$$

Итак, после окончания Соревнований клюшки будут стоить дешевле, чем до подорожания.

22а. *Гигантский арбуз весил 100 кг, влажность (насыщенность водой) арбуза составляла 97%. Затем, в результате землетрясения арбуз свалился в воду и находился в воде целый месяц, пока его оттуда наконец не вытащили. В итоге влажность арбуза составила 99%. Сколько стал весить арбуз?*

Решение. Из условия ясно, что масса сухого вещества арбуза составляла 3% от его общей массы, и тем самым была равна 3 кг. Обозначим через x новую массу арбуза после нахождения в воде. Тогда из условий задачи следует, что должно быть справедливо равенство:

$$3/x = 1/100 \qquad (*)$$

(поскольку в результате нахождения арбуза в воде не изменившаяся масса сухого вещества стала составлять 1% от новой массы арбуза). Решая уравнение (*), легко получаем:

$$x = 300 \text{ (кг)}.$$

Замечание. Полученный результат кажется довольно неожиданным. Поясним его с помощью рис. 13.

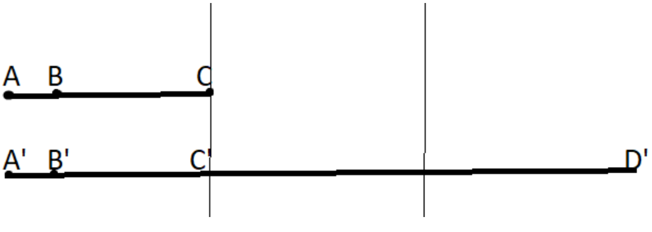


Рис. 13

Отрезки AB и A’B’ равны, но длина отрезка AB составляет в три раза бóльшую долю от длины AC, чем длина A'B’ от длины A’D’.

23. (см. [4]) *У Енота втрое больше орехов (по весу), чем у Моржа. Если Морж возьмет у Енота 1 кг орехов, то у Енота станет вдвое больше орехов (по весу), чем у Моржа. Сколько было кг орехов у каждого?*

Решение. Итак, по условию задачи, у Енота три весовые доли орехов, а у Моржа – одна весовая доля. Разделим каждую из этих долей на три разные части (см. рис. 14).

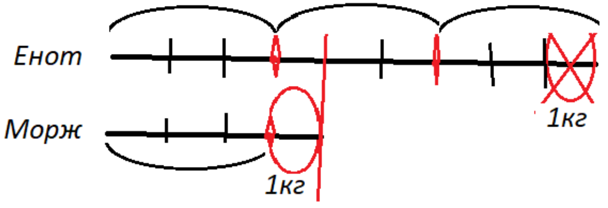


Рис. 14

Итак, у Енота оказывается 9 весовых частей, а у Моржа – 3 весовые части. Если Енот отдаст Моржу одну весовую часть, то у него окажется 8 весовых частей, а у Моржа – как раз вдвое меньше, 4 весовые части. Таким образом, заключаем, что одна весовая часть соответствует в точности весу в 1кг.

Итак, вначале у Енота было 9 кг орехов, а у Моржа – 3 кг орехов.

24. (см. [4]) *У Енота было втрое больше (по весу) орехов, чем у Моржа. Но когда каждый из них съел по килограмму орехов, то у Енота стало в 5 раз больше (по весу) орехов, чем у Моржа. Сколько кг орехов было у каждого?*

Решение. Из условия следует, что у Енота были три весовые доли орехов, а у Моржа – одна весовая доля. Разделим каждую такую долю на две равные части; тогда у Енота окажется 6 частей, а у Моржа – 2 части. Если у Енота и у Моржа отнять по одной весовой части орехов, то как раз окажется, что у Енота стало в 5 раз больше орехов, чем у Моржа (см. рис. 15).

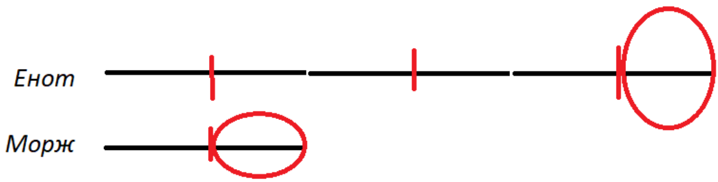


Рис. 15

Отсюда делаем вывод, что одна весовая часть в точности соответствует весу в 1 кг.

Итак, вначале у Енота было 6 кг орехов, а у Моржа – 2 кг орехов.

25. (см. [2]) *На березах сидели воробьи. Когда сидели по четыре воробья, то три березы остались без воробьев. А когда расселись по три воробья, то* *одному воробью не хватило березы. Сколько было берез и сколько воробьев?*

Решение. Из условия задачи сразу следует, что когда воробьи стали пересаживаться (желая сидеть не по 4, а по 3), то с берез, на которых сидело по 4 воробья, всего слетело 10 воробьев (см. рис. 16).

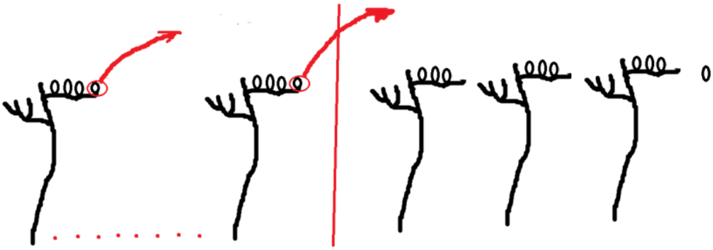


Рис. 16

Отсюда становится сразу ясно, что общее количество берез равно

$10 + 3 = 13.$

Что касается воробьев, то их число, очевидно, равно

$4 \cdot 10 = 40.$

26. (см. [1]) *Однажды Кощей Бессмертный решил позавтракать. Он набрал из жбана со сливками столовую ложку сливок и вылил ее в стакан чая. Потом перемешал (не очень тщательно) содержимое в стакане, набрал столовую ложку получившейся* *смеси и вылил ее в жбан и снова перемешал (на этот раз тщательно). Затем Кощей повторил ту же процедуру еще раз: набрал в жбане столовую ложку получившейся смеси, вылил ее в стакан (перемешал содержимое не очень тщательно), после чего набрал в стакане столовую ложку получившейся смеси и вылил ее в жбан. Чего в результате оказалось больше – сливок в стакане или чая в жбане?*

Решение. После всех переливаний, общий объем жидкости в обоих сосудах, очевидно, не изменился.

Рассмотрим ситуацию в стакане. Какой-то (неизвестный) объем в нем занимают сливки. Но соответствующий объем чая не мог исчезнуть. Следовательно, этот объем чая находится в жбане. Итак, сливок в стакане столько же, сколько чая в жбане.

27. *Ехали два вместительных автобуса. В автобусе № 1 ехали зайцы, а в автобусе № 2 – еноты. На первой остановке из автобуса № 1 вышли 5 зайцев и вошли в автобус № 2. После чего из автобуса № 2 вышли 7 зверей, которые пересели в автобус № 1. На следующей остановке из автобуса № 1 вышли 7 зверей и пересели в автобус № 2, после чего из автобуса № 2 вышли 5 зверей, которые пересели в автобус № 1. Кого в результате стало больше – енотов в автобусе № 1 или зайцев в автобусе № 2?*

Ответ: енотов в автобусе № 1 столько же, сколько зайцев в автобусе № 2.

28. *Ехали два вместительных автобуса. В автобусе № 1 ехали зайцы, а в автобусе № 2 – еноты. На первой остановке из автобуса № 1 вышли 5 зайцев и вошли в автобус № 2. После чего из автобуса № 2 вышли 7 зверей, которые пересели в автобус № 1. На следующей остановке из автобуса № 1 вышли 7 зверей и пересели в автобус № 2, после чего из автобуса № 2 вышли 5 зверей, которые пересели в автобус № 1. Наконец, на третьей остановке в автобус № 1 вошли 10 зайцев, а в автобус № 2 вошли 10 енотов.*

Кого в результате стало больше – енотов в автобусе № 1 или зайцев в автобусе № 2?

Ответ: енотов в автобусе № 1 столько же, сколько зайцев в автобусе № 2.

29. *Ехали два вместительных автобуса. В автобусе № 1 ехали зайцы, а в автобусе № 2 – еноты. На первой остановке из автобуса № 1 вышли 5 зайцев и вошли в автобус № 2. После чего из автобуса № 2 вышли 7 зверей, которые пересели в автобус № 1. На следующей остановке из автобуса № 1 вышли 7 зверей и пересели в автобус № 2, после чего из автобуса № 2 вышли 5 зверей, которые пересели в автобус*

№ 1. Наконец, на третьей остановке в автобус № 2 вошли 10 зайцев, а в автобус № 1 вошли 10 енотов.

Кого в результате стало больше – енотов в автобусе № 1 или зайцев в автобусе № 2?

Ответ: енотов в автобусе № 1 столько же, сколько зайцев в автобусе № 2.

30. (эта задача взята из [5]) *Однажды Василиса Премудрая решила выйти замуж. К ней тут же посватались Кощей Бессмертный и Иванушка-дурачок. «Вот вам две задачи, – сказала Василиса, – вы уж как-нибудь разберитесь между собой, кто какую задачу будет решать. А замуж я выйду за того, кто быстрее справится со своей задачей».*

А задачи были такие:

1) распилить березовый куб на четыре кубика;

2) распилить железный кубище на восемь кубов.

Пока Иванушка-дурачок чесал затылок, Кощей быстро схватил березовый куб и помчался его распиливать. «Так нечестно!» – закричал Иванушка, но было уже поздно.

За кого же вышла в результате замуж Василиса Премудрая?

Решение. Нетрудно показать, что куб распилить на 4 меньших куба невозможно. Действительно, предположим противное. Однако у куба имеется 8 вершин; геометрически очевидно, что никакие две из них не могут принадлежать ни одному меньшему кубу, на которые (по предположению) был распилен исходный куб. Таким образом, все вершины исходного куба (если он распилен на несколько меньших кубов) должны принадлежать разным получившимся в результате распиливания кубам. Это, в свою очередь, означает, что если исходный куб распилен на несколько кубических частей, то таких частей не меньше восьми.

Итак, Кощею досталась нерешаемая задача, поэтому жениться на Василисе Премудрой он не мог.

30а. (см. [7]) *Даны неправильные чашечные весы (не уравновешенные и неравноплечие), две правильные гири весом в 4 кг и 7 кг, а также мешок муки. Требуется точно отвесить 3 кг муки.*

Решение. На одну чашу (например, на левую) нужно поставить гирю весом в 7 кг и уравновесить ее с помощью муки (насыпанной на правую чашу). Затем на левой чаше нужно заменить гирю весом в 7 кг на гирю весом в 4 кг и досыпать на левую чашу муку до восстановления равновесия. Мука на левой чаше будет весить ровно 3 кг.

30б. *Даны неправильные чашечные весы (не уравновешенные и неравноплечие) и правильные гири весом в 3 кг, 7 кг, 10 кг, 15 кг, 20 кг, 22 кг, 30 кг, 40 кг,* *а также мешок муки. Требуется точно отвесить 1 кг муки за два взвешивания, причем все гири должны быть использованы.*

Решение. Для решения задачи нам необходимо выделить среди имеющихся гирь две группы, разность суммарных весов в которых равнялась бы 1 кг.

Имеем:

S_1 = 7 кг + 15 кг + 22 кг + 30 кг = 74 кг,

S_2 = 3 кг + 10 кг + 20 кг + 40 кг = 73 кг.

Далее, поступаем аналогично том, как мы действовали в предыдущей задаче. На одну чашу весов, например на левую, ставим гири общим весом в 74 кг, а на другую чашу (правую) сыплем муку, добиваясь равновесия обеих чаш. Затем поставленную группу гирь снимаем с весов и заменяем другой группой гирь, общим весом в 73 кг. Равновесие весов при этом, очевидно, нарушится. Восстанавливаем равновесие, досыпая муку на левую чашу. Вес муки на левой чаше как раз и будет равен 1 кг.

Замечание. Возникает, однако, вопрос, каким образом числа

3, 7, 10, 15, 20, 22, 30, 40 (*)

удалось разбить на две группы, суммы которых отличаются на 1. Проще всего поступить следующим образом. Находим сумму всех чисел (*), она равна 147. Затем делим число 147 пополам, получаем в ответе 73,5. Далее, из всех чисел (*) набираем слагаемые, дающие в сумме 74 (сделать это сравнительно несложно). Остальные числа дадут в сумме 73.

30в. (см. [8], [9]) *Человек стоит внутри магазина и видит на стеклянной витрине надпись:*

6SIX9

Какую надпись *он увидит, выйдя из магазина, в луже под витриной?*

Решение. Прежде всего, выйдя из магазина, человек увидит на витрине надпись, представляющую собой отражение относительно вертикальной оси надписи, которую он видел изнутри магазина, а именно:

Как это можно объяснить? Дело в том, что для того, чтобы узнать, как выглядит надпись на витрине снаружи, человеку не обязательно выходить из магазина. Вместо этого он может себе представить, что стеклянная витрина вращается относительно вертикальной оси (например, держится на двух шарнирах, расположенных один под другим). Если теперь повернуть витрину относительно такой оси, человек автоматически окажется с другой стороны витрины, не выходя из магазина. Нетрудно видеть, что надпись на витрине при этом *отразится* относительно упомянутой вертикальной оси.

Далее, надпись, видимая на витрине снаружи, отражается в луже, расположенной под витриной, т.е. фактически отражается относительно горизонтальной оси (линии соприкосновения здания с поверхностью лужи). В результате в луже человек увидит надпись

6XIS9

В заключение заметим, что последовательное отражение относительно вертикальной и горизонтальной оси равносильно повороту надписи на 180^{o}. Таким образом, посетитель магазина, чтобы узнать, какую именно надпись он увидит в луже под витриной, может поступить следующим образом. Нарисовать надпись, видимую изнутри магазина, на листке бумаги, а потом просто-напросто перевернуть этот листок «вверх ногами».

30г. (см. [8], [9]) *Используя любые символы (например, буквы русского и латинского алфавитов, цифры, математические знаки и др.) напишите на листке бумаги последовательность символов, которые будут испытывать* ***шесть различных кажущихся преобразований при переворачивании листка «вверх ногами».***

Ответ: например, надпись

И↖6MBNBM9↖S

При переворачивании листка «вверх ногами» мы увидим надпись

Таким образом, с исходной надписью произошли следующие кажущиеся (!) преобразования символов:

1) Буква N «осталась неподвижной на своем месте»;

2) буквы B «повернулись налево»;

3) буквы M «опрокинулись по вертикали»;

4) цифры 6 и 9 «поменялись размерами»;

5) стрелки, указывавшие на северо-запад, «поменяли свое направление на юго-восточное»;

6) буквы И, S «просто поменялись местами».

Почему эти преобразования – кажущиеся? Потому, что все символы на самом деле испытывают одно и то же преобразование – поворот на 180 градусов относительно центра симметрии символа N.

31. (см. [10], [12]) *Пусть K – прозрачный куб размером nxnxn, составленный из единичных прозрачных кубиков. Спрашивается: какое наибольшее количество «трехмерных» ладей можно расставить в имеющихся прозрачных кубиках, чтобы они не били* *друг друга*? (Трехмерные ладьи ходят, во-первых, как обычные ладьи, а кроме того, еще и по вертикали.)

Решение. Нетрудно понять, что вдоль каждого из горизонтальных слоев нашего куба можно разместить не более n ладей, при условии, что они не должны бить друг друга.

В то же время в отдельно взятом слое, соблюдая упомянутое условие, разместить n ладей можно (например, вдоль одной из главных диагоналей).

Так как всего горизонтальных слоев n штук, то общее число трехмерных ладей, которых мы сможем разместить внутри куба с соблюдением условий задачи, не превышает n^2. Покажем, что n^2 (трехмерных) ладей разместить в нашем кубе можно.

Для простоты ограничимся случаем $n = 8$.

Для того, чтобы сделать ситуацию более обозримой, попробуем изобразить на плоскости искомое расположение трехмерных ладей в кубе К. Нарисуем квадрат Q размера 8×8, составленный из единичных квадратов. Ладьям, расположенным в нижнем слое куба К, сопоставим единичные квадраты из Q, пометив их буквой «a», ладьям из следующего (второго снизу) слоя сопоставим единичные квадраты из Q, пометив их буквой «b», и так далее. В результате (если искомое расположение трехмерных ладей в К существует) все единичные квадраты, составляющие Q, будут помечены буквами. При этом, если искомое расположение трехмерных ладей существует, соответствие между ладьями и квадратами из Q должно оказаться взаимно однозначным.

В результате мы можем переформулировать нашу задачу следующим образом.

Имеется квадрат Q размером 8×8, составленный из единичных квадратов. Имеются также 8 первых букв какого-нибудь алфавита (например, a,b,c,…,h), каждая буква в количестве 8 штук. Таким образом, всего в нашем распоряжении ровно столько же букв, сколько единичных клеточек в квадрате Q. Требуется разместить все эти буквы в единичных квадратах таким образом, чтобы буквы каждого сорта встречались в каждой строке и в каждом столбце ровно один раз.

Оказывается, что сделать это весьма просто. Разместим тогда 8 букв (a,b,c,…,h,) в верхней строке квадрата Q в алфавитном порядке. А во всех последующих строках – с помощью циклической перестановки:

a	b	c	d	e	f	g	h
h	a	b	c	d	e	f	g
g	h	a	b	c	d	e	f
f	g	h	a	b	c	d	e
e	f	g	h	a	b	c	d
d	e	f	g	h	a	b	c
c	d	e	f	g	h	a	b
b	c	d	e	f	g	h	a

В случае общего n ситуация в точности такая же. Итак, мы установили, что максимальное число трехмерных ладей, которые можно разместить в кубе размером $n \times n \times n$ так, чтобы они не били друг друга, равно n^2.

Замечание. Вопрос о том, сколькими способами можно осуществить расстановку трехмерный ладей в кубе К, удовлетворив условиям задачи, в настоящее время остается открытым. Здесь будут рассмтрены некоторые более или менее очевидные геометрические соображения по этому поводу. Во-первых, осуществляя перестановку сортов букв в квадрате Q, мы тем самым производим перестановку «этажей» в кубе К. Очевидно, что при таких перестановках условия нашей задачи не нарушаются, т.е. из одного обнаруженного выше способа расстановки мы сразу получаем n! различных способов [11]. (Считаем, что куб К вращать не разрешается). Кроме того, условия задачи очевидным образом не нарушатся при произвольной перестановке строк (столбцов) в Q. (Очевидно, оба упомянутых типа перестановок в Q соответствуют перестановкам «вертикальных секций» в кубе К.)

Гипотеза. *Если n простое, то все способы расстановки ладей в кубе К, удовлетворяющие условию задачи, исчерпываются перечисленными выше тремя способами.*

Замечание. Если n – не простое, то очевидным образом возникают интересные симметричные возможности для раскраски куба К. Например, в случае четного n ($n = 2m$, $m > 1$) мы можем вместо построения таблицы вида (*) расставлять буквы на квадрате Q, устроив две независимые друг от друга циклические перестановки . Опять в качестве примера рассматриваем случай $n = 8$:

a b c d, d a b c, c d a b, b c d a (**)

e f g h, h e f g, g h f e, e g h f (***)

Перестановками (**) заполняем верхний левый и правый нижний квадраты размера 4×4 таблицы 8×8, составленной из клеток квадрата Q, а перестановками (***) – верхний правый и левый нижний квадраты размера 4×4 той же таблицы.

Аналогичным образом можно поступить, если n делится на 3 (а также на 4, 5 ит.д.). В случае n, делящегося на 3, квадрат Q естественным образом может быть разбит на 9 одинаковых меньших квадратов, заполняемых буквами при помощи циклической перестановки. Если у n несколько делителей, то внутри каждого из меньших квадратов можно устроить разбиение на еще более мелкие квадратики, действуя аналогичным способом и т.д.

32. *Пусть П – прозрачный прямоугольный параллелепипед размером $m\times n\times p$, где $m<n<p$, составленный из единичных прозрачных кубиков. Спрашивается: какое наибольшее количество «трехмерных» ладей можно расставить в имеющихся прозрачных кубиках, чтобы они не били друг друга? (Трехмерные*

ладьи ходят, во-первых, как обычные ладьи, а кроме того, еще и по вертикали.)

Ответ: m $\times$ ***n.***

33. (см. [12]) *На прямоугольную шахматную доску размером mxp (где m ≤ p) поставили ладью. Какое наименьшее число поворотов должна будет сделать ладья при условии, что ей нужно обойти все клетки на доске? (Возвращаться в исходную клетку не обязательно.)*

Решение. Идея решения этой задачи взята из [12], где рассматривается случай квадратной шахматной доски. Справедлива следующая

Лемма. *Для маршрута ладьи, проходящего через все клетки прямоугольной шахматной доски размером mxp (где m ≤ p) справедливо хотя бы одно из двух утверждений:*

(а) *вдоль каждой горизонтальной строки найдется участок горизонтального движения ладьи;*

(б) *вдоль каждого вертикального столбца найдется участок вертикального движения ладьи.*

Доказательство леммы. Пусть, например, вдоль некоторого столбца не найдется ни одного участка вертикального движения ладьи. Но так как все клетки этого столбца были посещены ладьей, то неизбежно получаем, что вдоль каждой горизонтальной строки имеется участок горизонтального движения ладьи. Тем самым лемма доказана.

Продолжение решения задачи 33. Пусть выполнено условие (а) леммы. Всего имеется p горизонтальных строк на нашей доске (число p равно количеству клеток в вертикальном столбце). Мысленно представим себе, что между этими строками существуют бесконечно-тонкие горизонтальные промежутки; таких промежутков, очевидно, будет $p - 1$. Таким образом, чтобы осуществить горизонтальное движение по участку каждой из p строк, придется сделать по крайней мере $p - 1$ переход между строками. Каждому такому переходу отвечают два поворота на 90^o маршрута ладьи.

Итак, в случае (а) для числа поворотов N маршрута ладьи получим:

$N \geq 2(p - 1)$.

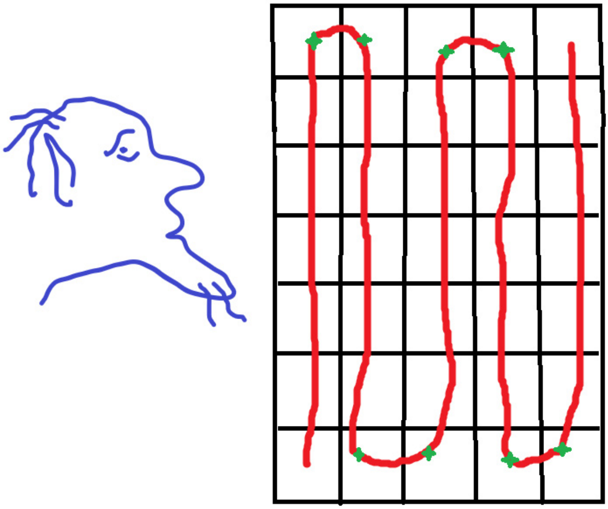
Аналогично, в случае, когда выполнено условие (б) леммы, для числа поворотов маршрута ладьи имеем:

$N \geq 2(m - 1)$.

Итак, для каждого маршрута ладьи, проходящего через все клетки нашей доски, справедлива оценка количества поворотов:

$N \geq \min \{2(p - 1); 2(m - 1)\} = 2(m - 1)$.

Нетрудно видеть, однако, что найденный минимум числа поворотов достигается на маршруте, исходящем из угловой клетки доски и по очереди проходящем все вертикальные столбцы (см. рис. 17).



m = 5, p = 7; число точек поворота равно 2(m - 1) = 8

Рис. 17

34. (см. [12]) *Пусть К – прозрачный куб размером nxnxn (где n – четное), составленный из единичных прозрачных кубиков. Доказать, что можно так расставить $n^2/2$ «трехмерных» ладей в имеющихся прозрачных кубиках, чтобы все остальные (не занятые ладьями) кубики были «под прицелом» хотя бы одной из расставленных ладей. (Трехмерные ладьи ходят, во-первых, как обычные ладьи, а кроме того, еще и по вертикали.)*

Решение. Нам будет удобно ограничиться случаем n = 8. (Общий случай рассматривается совершенно аналогично.) Решение представлено ниже в таблице, где буквами «a» обозначены ладьи, расположенные в нижнем слое кубиков, буквами «b» - ладьи, расположенные во втором снизу слое кубиков, … , буквами «h» - ладьи, расположенные в верхнем (восьмом) слое кубиков:

a	b	c	d				
d	a	b	c				
c	d	a	b				
b	c	d	a				
				e	f	g	h
				h	e	f	g
				g	h	e	f
				f	g	h	e

Итак, в случае n = 8 (когда общее число кубиков, образующих куб К, равно 8^3) число ладей, под контролем которых находятся все кубики, оказалось равно $8^2/2 = 32$. В случае общего четного n решение строится аналогичным образом. Можно показать (см. по этому поводу [12]), что при четном n с помощью числа ладей, меньшего, чем $n^2/2$, невозможно держать «под обстрелом» все кубики куба К размером $n \times n \times n$.

35 (см. [12]) *Пусть К – прозрачный куб размером nxnxn (где n –нечетное), составленный из единичных прозрачных кубиков. Доказать, что можно так расставить $(n^2 + 1)/2$ «трехмерных» ладей в имеющихся прозрачных кубиках, чтобы все остальные (не заня-*

тые ладьями) кубики были «под прицелом» хотя бы одной из расставленных ладей. (Трехмерные ладьи ходят, во-первых, как обычные ладьи, а кроме того, еще и по вертикали.)

Решение. Нам будет удобно ограничиться случаем n = 7. (Общий случай рассматривается совершенно аналогично.) Решение представлено ниже в таблице, где буквами «a» обозначены ладьи, расположенные в нижнем слое кубиков, буквами «b» - ладьи, расположенные во втором снизу слое кубиков, … , буквами «g» - ладьи, расположенные в верхнем (седьмом) слое кубиков:

a	b	c	d			
d	a	b	c			
c	d	a	b			
b	c	d	a			
				e	f	g
				g	e	f
				f	g	e

Итак, в случае n = 7 (когда общее число кубиков, образующих куб К, равно 7^3) число ладей, под контролем которых находятся все кубики, оказалось равно $(7^2 + 1)/2 = 25$. В случае общего нечетного n решение строится аналогичным образом. Можно показать (см. по этому поводу [12]), что при нечетном n с помощью числа ладей, меньшего, чем $(n^2 + 1)/2$, невозможно держать «под обстрелом» все кубики куба К размером $n \times n \times n$.

Загадка. (см. [5]) *Расположим все (без пропусков) четные и нечетные числа в их естественном порядке. Верно ли, что:*

а) между любыми двумя четными числами найдется хотя бы одно нечетное?

б) между любыми двумя нечетными числами найдется хотя бы одно четное?

Указание.

а) Верно.

б) Неверно. Возмущенному читателю следует иметь в виду, что загадка – это не математическая задача, в ней важны не только присутствующие слова, но и слова отсутствующие. О каких числах здесь может идти речь?

Список использованной литературы

1. Козлова Е.Г. Сказки и подсказки. – М.: МЦНМО, 2004. – 165 с.

2. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике. – М.: Просвещение, 2012. – 207 с.

3. Дружинин Б.Л. Развивающие задачи для детей 7–12 лет. Вып. 3. – М.: ИЛЕКСА, 2018. – 93 с.

4. Баврин И.И. Сельский учитель С.А. Рачинский. – М.: Физматлит, 2015. – 124 с.

5. Локшин А.А., Иванова Е.А. Математическая смесь. Изд. 3. – М.: МАКС Пресс, 2016. – 124 с.

6. Локшин А.А., Иванова Е.А., Бахтин М.М. Диаграммы Эйлера в элементарной математике. – М.: МАКС Пресс, 2022. – 96 с.

7. Локшин А.А., Бахтина О.В., Сагомонян Е.А. Арифметика на чашечных весах. Изд. 2. – М.: МАКС Пресс, 2023. – 36 с.

8. Лаврова Н.Н., Локшин А.А. О задаче на преобразование симметрии / Начальная школа. 2021. № 2. С. 70–71.

9. Локшин А.А., Лаврова Н.Н. О некоторых свойствах фигур, обладающих симметрией / Начальная школа, 2021. № 10. С. 27–28.

10. Локшин А.А., Сагомонян Е.А. Об одной комбинаторной задаче / Тенденции развития науки и образования, 2023 (в печати).

11. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

12. Гик Е.Я. Шахматы и математика. Библиотечка Квант. Вып. 24. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЛОКШИН Александр Александрович
САГОМОНЯН Елена Артуровна

ИЗБРАННЫЕ ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ 4–7 КЛАССОВ

Учебное пособие

Второе издание, исправленное и дополненное

В издании использованы рисунки
А.А. Локшина

Подготовка оригинал-макета:
Издательство «МАКС Пресс».
Главный редактор: *Е.М. Бугачева*
Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова*
Обложка: *А.В. Кононова*

Подписано в печать 27.10.2023 г.
Формат 84x108 1/32. Усл.печ.л. 4,83. Тираж 25 экз. Заказ 163.

Издательство ООО «МАКС Пресс».
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел.8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н